Listopad 2014 rok (poziom rozszerzony)

Zadania zamknięte

Zad 1. $|3x+6| > 6$

$3x+6>6 \quad \vee \quad 3x+6<-6$

$3x>6-6 \quad \vee \quad 3x<-6-6$

$3x>0 \quad \vee \quad 3x<-12 \;|:3$

$x>0 \quad \vee \quad x<-4$ **(A)**

Zad 2. $W(x)=2x^3-4x^2-15x-12 \qquad P(x)=x+3$

Pierwiastkiem wielomianu $P(x)$ jest $x=-3$

$W(-3)=2\cdot(-3)^3-4\cdot(-3)^2-15\cdot(-3)-12=2\cdot(-27)-4\cdot 9+45-12=-54-36+33=-90+33=-57$ Wartość wielomianu $W(x)$ dla pierwiastka wielomianu $P(x)$ jest resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$ **(A)**

Zad 3. $\log_2 7+\log_8 7=\log_2 7+\frac{\log_2 7}{\log_2 8}=\log_2 7+\frac{\log_2 7}{3}=\log_2 7+\frac{1}{3}\log_2 7=\left(1+\frac{1}{3}\right)\log_2 7=$

$=\frac{4}{3}\log_2 7$ **(B)**

Zad 4. $W(x)=(2x+1)^3-(x-1)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2+1^3-[x^3-3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2-1^3]=8x^3+3\cdot 4x^2+6x+1-(x^3-3x^2+3x-1)=8x^3+12x^2+6x+1-x^3+3x^2-3x+1=7x^3+15x^2+3x+2$ **(A)**

Zad 5. Równanie okręgu $x^2+10x+y^2-4y+25=0$ trzeba doprowadzić do postaci kanonicznej czyli zapisać jako kwadraty pewnych sum, czyli:

$x^2+2\cdot x\cdot 5+25+y^2-2\cdot y\cdot 2+4-4=0$

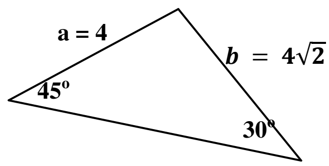
$(x+5)^2+(y-2)^2=4$ znając wzór na równanie okręgu w postaci kanonicznej $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ łatwo stwierdzić że $S=(-5;\ \ 2) \qquad r=2$ **(D)**

Zad 6. $\begin{cases} a_1=32 \\ a_{n+1}=\frac{1}{7}a_n+2 \end{cases}$ $\quad a_2=\frac{1}{7}\cdot 32+2=\frac{32}{7}+\frac{14}{7}=\frac{46}{7}=6\frac{4}{7}$

$a_3=\frac{1}{7}\cdot\frac{46}{7}+2=\frac{46}{49}+\frac{98}{49}=\frac{144}{49} \qquad a_4=\frac{1}{7}\cdot\frac{144}{49}+2=\frac{144}{343}+\frac{686}{343}=\frac{830}{343}=2{,}41982507\ldots$

Odpowiedź: Trzy początkowe cyfry po przecinku to $\boxed{4}\,\boxed{1}\,\boxed{9}$

Zad 7. Z twierdzenia Sinusów mamy $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ czyli:



$\frac{4}{\sin 30^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ}$ co daje $\frac{4}{\frac{1}{2}}=\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ czyli $b\cdot\frac{1}{2}=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\,|\cdot 2$

$b=4\sqrt{2}\approx 4\cdot 1{,}414213\ldots=5{,}656854\ldots$

Odpowiedź: Cyfra jedności i dwie cyfry po przecinku to: $\boxed{5}\,\boxed{6}\,\boxed{5}$

Zad 8. $A=(5;\ -6) \qquad y=2x+1$ Przekształćmy równanie prostej do postaci ogólnej $2x-y+1=0$ czyli $A=2 \quad B=-1 \quad C=1$

Obliczmy odległość punktu od prostej zgodnie ze wzorem $d=\frac{|Ax_0+By_0+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|2\cdot 5-1\cdot(-6)+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=$

$\frac{10+6+1}{\sqrt{4+1}}=\frac{17}{\sqrt{5}}=\frac{17\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{17\sqrt{5}}{5}\approx 7{,}6026\ldots$

Odpowiedź: Otrzymany wynik z dwoma cyframi po przecinku to: $\boxed{7}\,\boxed{0}\,\boxed{6}$

Zad 9. Wykonując przekrój zgodnie z treścią zadania otrzymujemy trójkąt DSE którego bok SD to połowa przekątnej podstawy

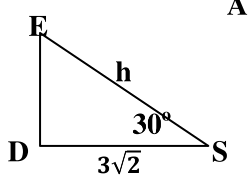
Przekątna podstawy to $DB=6\sqrt{2}$

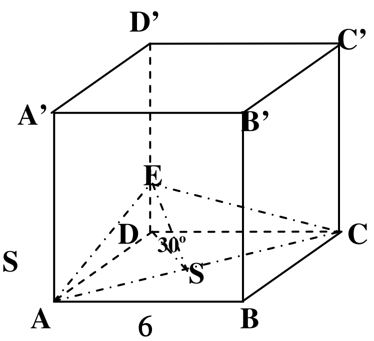
$DS=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

Mamy obliczyć wysokość otrzymanego przekroju czyli wysokość trójkąta ACE – odcinek SE.

Odcinek SE jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym DSE stosujemy wzór na $\cos\alpha$ mamy

$\cos 30^\circ=\frac{3\sqrt{2}}{h}$ czyli $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{h}$





$h = \frac{2\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{6} \approx 2\cdot 2{,}449489 \ldots = 4{,}898979 \ldots \approx 4{,}899$

Odpowiedź: Trzy początkowe cyfry po przecinku to $\boxed{8}\boxed{9}\boxed{9}$

Zad 10.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)(3n^2-1)}{11n^3+5n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-n+12n^2-4}{11n^3+5n+2} = \frac{\frac{3n^3}{n^3}+\frac{12n^2}{n^3}-\frac{n}{n^3}-\frac{4}{n^3}}{\frac{11n^3}{n^3}+\frac{5n}{n^3}+\frac{2}{n^3}} = \frac{3+\frac{12}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{11+\frac{5}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = \frac{3}{11} = 0,(27) \approx 0{,}273$$

Odpowiedź: Po zaokrągleniu trzy cyfry po przecinku to $\boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{3}$

Zad 11. $\sin 3x + \sin 9x = 0 \qquad\qquad x \in \langle 0;\ \ \pi\rangle$

Korzystając ze wzoru $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ dla $\alpha = 9x \quad \beta = 3x$ mamy:

$2\sin\frac{9x+3x}{2}\cos\frac{9x-3x}{2} = 0$ czyli $2\sin 6x\cos 3x = 0 |: 2$

$\sin 6x \cos 3x = 0$

$\sin 6x = 0 \qquad \vee \qquad \cos 3x = 0$

$6x = 0 + k\pi \Big|: 6 \qquad \vee \qquad 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Big|: 3$

$x_1 = 0 + k\cdot\frac{\pi}{6} \qquad\qquad x_2 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

Teraz trzeba ustalić ile i o jakiej wartości konkretnych wyników dla $x \in \langle 0;\ \ \pi\rangle$

Dla $x_1 = 0 + k\cdot\frac{\pi}{6}$ mamy:

$k = 0, x_1 = 0;\ \ k = 1,\ x_2 = \frac{\pi}{6};\ \ k = 2,\ x_3 = \frac{\pi}{3};\ \ k = 3,\ x_4 = \frac{\pi}{2};\ \ k = 4,\ x_5 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3};\ \ k = 5,\ x_6 = \frac{5\pi}{6};\ \ k = 6,\ x_7 = \frac{6\pi}{6} = \pi;$

Dla $x_2 = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$ mamy

$k = 0,\ x_8 = \frac{\pi}{6};\ \ k = 1,\ x_9 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2};\ \ k = 2,\ x_{10} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6};$ widzimy że te rozwiązania pokrywają się z już podanymi wcześniej

Odpowiedź: Równanie ma 7 rozwiązań $x \in \left\{0;\ \frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{5\pi}{6};\ \pi\right\}$

Zad 12. $x^3 - 4x^2 - 5x < 0$

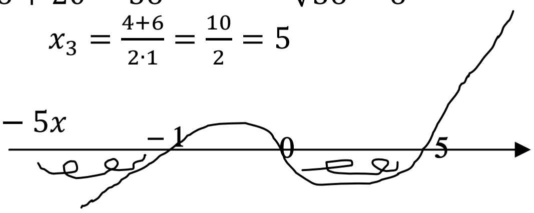
$x(x^2 - 4x - 5) < 0$ szukamy pierwiastków równania $x(x^2 - 4x - 5) = 0$

$x = 0 \qquad \vee \qquad x^2 - 4x - 5 = 0$

$x_1 = 0 \qquad \Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-5) = 16 + 20 = 36 \qquad \sqrt{36} = 6$

$x_2 = \frac{4-6}{2\cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1 \qquad x_3 = \frac{4+6}{2\cdot 1} = \frac{10}{2} = 5$

Szkicujemy wykres wielomianu $W(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$



Odpowiedź: $x \in (-\infty;\ \ -) \cup (0;\ \ 5)$

Zad 13. $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-1} \qquad D = R\backslash\{1\}$

$f'(x) = \frac{-2x(x^2-1)-(9-x^2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^3+2x-18x+2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-16x}{(x^2-1)^2}$

Aby istniało ekstremum musi być spełniony warunek $f'(x) = 0$ czyli $\frac{-16x}{(x^2-1)^2} = 0$ Mamy więc:

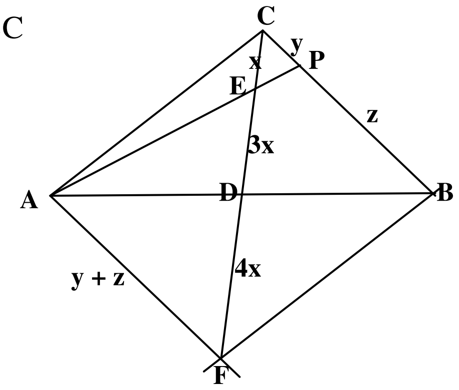
$-16x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0$

Mamy więc wykazane że ekstremum o ile istnieje jest tylko jedno dla $x = 0$

Bardzo łatwo wykazać że jest to maksimum gdyż dla dowolnego $x < 0 \qquad -16x$ jest dodatnie, a dla dowolnego $x > 0 \qquad -16x$ jest ujemne

Odpowiedź $y = 4x + \frac{67}{27}$ oraz $y = 4x - 7$

Zad 14. Do trójkąta ABC dorysowujemy trójkąt AFB taki że:
AC || BF oraz BC || AF Otrzymujemy równoległobok AFBC
oraz trójkąty ABC i AFB są przystające czyli |BC| = |AF|
Z równoległości odcinków AF i BC wynika też fakt
podobieństwa trójkątów AFE i PCE bo
$\sphericalangle ECP = \sphericalangle AFD$ - naprzemianległe
$\sphericalangle CEP = \sphericalangle AEF$ - wierzchołkowe
$\frac{CP}{CE} = \frac{AF}{EF}$ $\quad \frac{y}{x} = \frac{y+z}{7x}$ $\quad 7xy = x(y+z)$
$7xy = xy + xz \quad 6xy = xz|:x$
$6y = z|:6 \quad y = \frac{1}{6}z$ czyli $\frac{CP}{PB} = \frac{1}{6}$
co należało wykazać.



Zad 15. $S = \frac{a_1}{1-q}$ suma ciągu nieskończonego gdy $|q| < 1$
$\frac{a_1}{1-q} = 8$ to równanie oczywiste (wynika z I zdania w zadaniu)
Teraz jeżeli mamy mieć ciąg sześcianów wyrazów czyli $\{a_1{}^3;\ a_2{}^3;\ a_3{}^3; \ldots\}$to tu iloraz wynosi q^3
czyli mamy: $\frac{a_1{}^3}{1-q^3} = \frac{512}{7}$ Teraz można napisać układ równań:
$\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 8 \\ \frac{a_1{}^3}{1-q^3} = \frac{512}{7} \end{cases}$ oraz pamiętamy o założeniu $|q| < 1$
$\begin{cases} a_1 = 8(1-q) \\ 7a_1^3 = 512(1-q^3) \end{cases}$ wstawiając I równanie do drugiego otrzymujemy:
$7[8(1-q)]^3 = 512(1-q^3)$
$7 \cdot 8^3 \cdot (1-q)^3 = 512(1-q^3)$
$7 \cdot 512 \cdot (1-q)^3 = 512(1-q^3)|:512$
$7 \cdot (1-q)^3 = 1 - q^3$
$7(1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot q + 3 \cdot 1 \cdot q^2 - q^3) = 1 - q^3$
$7(1 - 3q + 3q^2 - q^3) = 1 - q^3$
$7 - 21q + 21q^2 - 7q^3 = 1 - q^3$
$-7q^3 + q^3 + 21q^2 - 21q + 7 - 1 = 0$
$-6q^3 + 21q^2 - 21q + 6 = 0$ łatwo zauważyć że pierwiastkiem jest $q_1 = 1$ bo $(-6 + 21 - 21 + 6 = 0)$
Dzielimy wielomian metodą Hornera przez $(q-1)$

	- 6	21	-21	6
Obliczenia		$1 \cdot (-6) + 21 = 15$	$1 \cdot 15 - 21 = -6$	$1 \cdot (-6) + 6 = 0$
Pierwiastek 1	- 6	15	- 6	reszta 0

Otrzymaliśmy wielomian $-6q^2 + 15q - 6$
Mamy więc do policzenia $-6q^2 + 15q - 6 = 0$
$\Delta = 15^2 - 4 \cdot (-6) \cdot (-6) = 225 - 144 = 81 \qquad \sqrt{81} = 9$
$q_2 = \frac{-15-9}{2 \cdot (-6)} = \frac{-24}{-12} = 2 \qquad q_3 = \frac{-15+9}{2 \cdot (-6)} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$
Pamiętając o założeniu $|q| < 1$ rozwiązaniem jest tylko $q_3 = \frac{1}{2}$
$a_1 = 8(1-q) = 8\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$
Odpowiedź: Pierwszy wyraz ciągu wynosi $a_1 = 4$ a iloraz $q = \frac{1}{2}$.

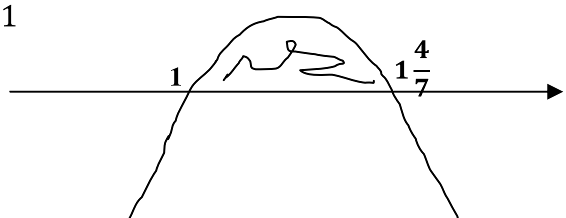
Zad 16. Liczby mają być sześciocyfrowe i w każdej ma być dokładnie 2 dwójki i 1 jedynka oraz 3 cyfry dowolne inne.

1. Na pierwszym miejscu stawiamy jedynkę to na pozostałych 5 miejscach mają być dwie dwójki$\binom{5}{2}$ (dwójki są nierozróżnialne więc kombinacja) oraz 3 dowolne inne cyfry z 8 pozostałych $\{0;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$ 8^3 (cyfry te mogą się powtarzać więc wariacja z powtórzeniami)
Daje to wynik $\binom{5}{2} \cdot 8^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 512 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 512 = 10 \cdot 512 = 5120$

2. Na pierwszym miejscu stawiamy dwójkę to na 5 pozostałych miejscach mamy jeszcze jedną dwójkę i jedną jedynkę. Powiedzmy że pierwszą z nich stawiamy dwójkę (pięć pól do wyboru) potem jedynkę (cztery pola do wyboru) i na koniec trzy pozostałe dowolne cyfry 8^3 możliwości jak w punkcie 1.
Daje to wynik $5 \cdot 4 \cdot 8^3 = 20 \cdot 512 = 10240$
3. Na pierwszym miejscu dowolna inna cyfra (jest takich 7 bo zero nie może być na pierwszym miejscu) Potem mamy 3 cyfry ustalone (dwie dwójki $\binom{5}{2} = 10$ i jedynka $\binom{3}{1} = 3$) i zostają tylko dwa wolne miejsca dla pozostałych dowolnych cyfr czyli jest to 8^2 możliwości.
Daje to wynik $7 \cdot \binom{5}{2} \cdot 3 \cdot 8^2 = 7 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 64 = 210 \cdot 64 = 13440$
Odpowiedź: Ostatecznie mamy wynik końcowy $5120 + 10240 + 13440 = 28800$

Zad 17. Suma krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego to $6a + 3b$
gdzie a krawędź podstawy b krawędź boczna (wysokość graniastosłupa)
Mamy więc:
$6a + 3b = 18| : 3$
$2a + b = 6 \qquad b = 6 - 2a$
$V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(6 - 2a) = \frac{6a^2\sqrt{3} - 2a^3\sqrt{3}}{4} = \frac{2(3a^2\sqrt{3} - a^3\sqrt{3})}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3} - a^3\sqrt{3}}{2}$
$V(a) = \frac{3a^2\sqrt{3} - a^3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(3a^2 - a^3)$ (otrzymaliśmy wzór na objętość graniastosłupa jako funkcję zmiennej ***a***)
Dziedziną jest $(0; \;\; 3)$ „***a***” jako długość krawędzi podstawy musi być większa od 0, nie może też być równa lub większa od 3 bo wtedy „***b***” jako krawędź boczna byłaby mniejsza lub równa od 0
$V'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}(6a - 3a^2)$ Badamy dla jakich a funkcja osiąga ekstremum
$\frac{\sqrt{3}}{2}(6a - 3a^2) = 0$ czyli $6a - 3a^2 = 0| : 3$
$2a - a^2 = 0 \qquad a(2 - a) = 0 \qquad a_1 = 0 \quad \vee \quad 2 - a = 0$
Mamy dwa rozwiązania $\quad a_1 = 0 \qquad a_2 = 2$
I rozwiązanie nie spełnia warunków zadania krawędź nie może mieć długości 0 (nie należy do dziedziny)
II. Badamy dla $a = 2$ Czy jest to minimum czy maksimum.
$V'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}(6a - 3a^2)$
Dla $a \in (0; \;\; 2)$ wyrażenie $6a - 3a^2 = 3a(2 - a)$ jest iloczynem dwóch liczb dodatnich czyli $6a - 3a^2 > 0$
Dla $a \in (2; \;\; 3)$ wyrażenie $6a - 3a^2 = 3a(2 - a)$ jest iloczynem liczby dodatniej $3a$ i ujemnej $2 - a$ czyli $6a - 3a^2 < 0$
Wyka z tego że w przedziale $(0; \;\; 2)$ funkcja rośnie a w przedziale $(2; \;\; 3)$ maleje. Mamy więc maksimum.
Obliczmy teraz objętość tego graniastosłupa $a = 2 \qquad b = 6 - 2a = 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$
$V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot b = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$
Odpowiedź: Możliwie największa objętość tego graniastosłupa to $2\sqrt{3}$.

Zad 18. $f(x) = (m - 1)x^2 - (m - 1)x + 2m - 3$ Mamy ustalić ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x)$ w zależności od parametru m.
I $m - 1 \neq 0$ aby funkcja $f(x)$ była kwadratowa czyli $m \neq 1$
Gdy $m = 1$ to funkcja przyjmuje postać $f(x) = 2m - 3 = -1$ czyli jest funkcją stałą nie mającą miejsca zerowego
II $\Delta = (m - 1)^2 - 4(m - 1)(2m - 3)$
$(m - 1)^2 - 4(m - 1)(2m - 3) = m^2 - 2m + 1 - 4(2m^2 - 3m - 2m + 3) =$
$= m^2 - 2m + 1 - 8m^2 + 12m + 8m - 12 = -7m^2 + 18m - 11$
Ustalamy kiedy $\Delta > 0$ i kiedy $\Delta = 0$ w zależności od parametru ***m*** aby ustalić ile miejsc zerowych ma funkcja $f(x)$.
$-7m^2 + 18m - 11 > 0$
$\Delta = 18^2 - 4 \cdot (-7) \cdot (-11) = 324 - 308 = 16 \qquad \sqrt{16} = 4$
$m_1 = \frac{-18-4}{2 \cdot (-7)} = \frac{-22}{-14} = \frac{11}{7} = 1\frac{4}{7} \qquad m_2 = \frac{-18+4}{2 \cdot (-7)} = \frac{-14}{-14} = 1$



Funkcja $f(x)$ ma 2 miejsca zerowe dla $m \in \left(1;\quad 1\frac{4}{7}\right)$

ma jedno miejsce zerowe dla $m = 1\frac{4}{7}$

nie ma miejsc zerowych dla $m \in (-\infty;\quad 1\rangle \cup \left(1\frac{4}{7};\quad +\infty\right)$

W tej sytuacji funkcja $g(x)$ ma wzór:

$$g(m) = \begin{cases} 0 & dla\ m \in (-\infty;\quad 1\rangle \\ 2 & dla\ m \in \left(1;\quad 1\frac{4}{7}\right) \\ 1 & dla\quad m = 1\frac{4}{7} \\ 0 & dla\ \ m \in \left(1\frac{4}{7};\quad +\infty\right) \end{cases}$$ i wykres: