Maj 2015r - poziom rozszerzony

Zadania zamknięte

Zad 1. $|2x-8| \leq 10$

$2x-8 \leq 10 \quad \wedge \quad 2x-8 \geq -10$

$2x \leq 10+8 \quad \wedge \quad 2x \geq 8-10$

$2x \leq 18 \quad \wedge \quad 2x \geq -2$

$x \leq 9 \quad \wedge \quad x \geq -1$ **(D)**

Zad 2. $f(x) = \begin{cases} x-2 & dla\ x \leq 0 \\ \big||x+3|-4\big| & dla\ x > 0 \end{cases}$ $f(x)=1$

$x-2=1 \quad \Longrightarrow \quad x=1+2=3 \quad \wedge \quad x \leq 0 \ \ sprzeczność$

$\big||x+3|-4\big| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x+3|-4=1 \quad \vee \quad |x+3|-4=-1$

1) $|x+3|-4=1 \quad \Leftrightarrow \quad |x+3|=1+4 \quad \Leftrightarrow \quad |x+3|=5$

a) $x+3=5 \quad \Longrightarrow \quad x=5-3 \quad \Longrightarrow \quad x=2 \ \wedge \ x>0$ ***OK.***

b) $x+3=-5 \quad \Longrightarrow \quad x=-5-3 \quad \Longrightarrow \quad x=-8 \ \wedge \ x>0$ sprzeczność

2) $|x+3|-4=-1 \quad \Leftrightarrow \quad |x+3|=-1+4 \quad \Leftrightarrow \quad |x+3|=3$

c) $x+3=3 \quad \Longrightarrow \quad x=3-3 \quad \Longrightarrow \quad x=0 \wedge x>0$ sprzeczność

d) $x+3=-3 \quad \Longrightarrow \quad x=-3-3 \quad \Longrightarrow \quad x=-6 \ \wedge x>0$ sprzeczność **(A)**

Zad 3. $\left(3-2\sqrt{3}\right)^3 = 3^3 - 3\cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{3} + 3\cdot 3 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^3 = 27 - 54\sqrt{3} + 9\cdot 4\cdot 3 - 8\cdot 3\sqrt{3} =$

$=27+108-54\sqrt{3}-24\sqrt{3} = 135-78\sqrt{3}$ **(C)**

Zad 4. $2\sin x + 3\cos x = 6$ Takie równanie nie może mieć rozwiązań z prostej przyczyny.

$|\sin x| \leq 1$ tak samo $|\cos x| \leq 1$ i oczywiście $2+3=5<6$ **(A)**

Zad 5. $y=2x+4$ czyli w postaci ogólnej $2x-y+4=0 \quad P=(0;\ \ 0)$

$d = \frac{|2\cdot 0 - 1\cdot 0 + 4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ **(B)**

Zad 6. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11n^3+6n+5}{6n^3+1} - \frac{2n^2+2n+1}{5n^2-4}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{11n^3}{n^3}+\frac{6n}{n^3}+\frac{5}{n^3}}{\frac{6n^3}{n^3}+\frac{1}{n^3}} - \frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}-\frac{4}{n^2}}\right) = \frac{11}{6}-\frac{2}{5} = \frac{55}{30}-\frac{12}{30} = \frac{43}{30} \approx$

$1{,}433\cdots$

Zad 7. $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ - postać iloczynowa funkcji kwadratowej

$f(x)=a(x+1)(x-3)$

$f(6)=a(6+1)(6-3)=a\cdot 7\cdot 3=21a$

$f(12)=a(12+1)(12-3)=a\cdot 13\cdot 9=117a$

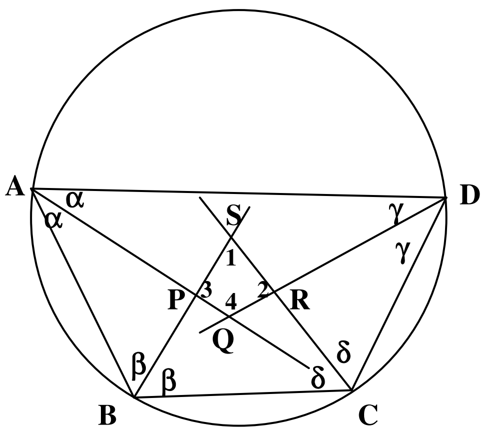
$\frac{f(6)}{f(12)} = \frac{21a}{117a} = \frac{7}{39}$

Zad 8. $x^4-x^2-2x+3>0$

$x^4-2x^2+1+x^2-2x+1+1>0$

$(x^2-1)^2+(x-1)^2+1>0$ Nierówność w tej postaci jest wyraźnie prawdziwa bo mamy sumę dwóch kwadratów liczb które są nie ujemne oraz 1 co w sumie daje liczbę dodatnią

Zad 9.



Czworokąt ABCD jest wpisany w okrąg więc $\alpha+\delta=90°$ oraz $\beta+\gamma=90°$

czyli $\alpha+\beta+\delta+\gamma=180°$

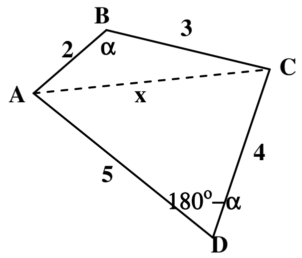
Mamy trójkąt AQD więc $\alpha+\gamma+\sphericalangle 4=180°$

Mamy trójkąt BSC więc $\beta+\delta+\sphericalangle 1=180°$

sumując te dwa równania otrzymujemy

$\beta + \delta + \sphericalangle 1 + \alpha + \gamma + \sphericalangle 4 = 360°$ czyli $\alpha + \beta + \delta + \gamma + \sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = 360°$
Mamy więc $180° + \sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = 360°$ i ostatecznie
$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = 180°$ a z tego wynika że także $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 180°$
Tak więc czworokąt PQRS da się wpisać w okrąg

Zad 10. Czworokąt ABCD



Zapisujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ABC |AC| = x
$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\alpha$
$x^2 = 4 + 9 - 12 \cdot \cos\alpha$
$x^2 = 13 - 12 \cdot \cos\alpha$
Zapisujemy twierdzenie cosinusów dla trójkąta ADC zauważając że $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$
$x^2 = 5^2 + 4^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos\alpha$
$x^2 = 25 + 16 + 40 \cdot \cos\alpha$
$x^2 = 41 + 40 \cdot \cos\alpha$
Porównując prawe strony mamy: $13 - 12 \cdot \cos\alpha = 41 + 40 \cdot \cos\alpha$
$-12 \cdot \cos\alpha - 40 \cdot \cos\alpha = 41 - 13$
$-52 \cdot \cos\alpha = 28 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos\alpha = -\frac{28}{52} = -\frac{7}{13}$
Korzystając ponownie z twierdzenia cosinusów mamy:
$x^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{7}{13}\right)$
$x^2 = 13 - 12 \cdot \left(-\frac{7}{13}\right) = 13 + \frac{84}{13} = \frac{169+84}{13} = \frac{253}{13}$
$x = \sqrt{\frac{253}{13}}$ Odpowiedź: Przekątna AC ma długość $\sqrt{\frac{253}{13}}$

Zad 11. I urna 3 kule białe i 5 czarnych razem 8 kul.
I etap: losowanie 1 kuli z I urny $\overline{\overline{\Omega}} = 8$ $\overline{\overline{B_1}} = 3$ - wylosowana biała $\overline{\overline{B_2}} = 5$ wylosowana czarna
$P(B_1) = \frac{3}{8} \qquad P(B_2) = \frac{5}{8}$
II etap: losowanie 2 kul z II urny. Rozpatrujemy 2 przypadki pod warunkiem że B_1 lub B_2
a) w I etapie wylosowana biała – II urna zawiera 7 + 3 =10 kul białych i 2 czarne razem 12 kul
$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 11 \cdot 6 = 66$ A – wylosowano 2 kule białe
$\overline{\overline{A}} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 9 \cdot 5 = 45$ $P(A|B_1) = \frac{45}{66} = \frac{15}{22}$
b) w I etapie wylosowana czarna – II urna zawiera 7 białych i 2+3 = 5 czarnych razem 12 kul
$\overline{\overline{\Omega}} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 11 \cdot 6 = 66$ A – wylosowano 2 kule białe
$\overline{\overline{A}} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 3 \cdot 7 = 21$ $P(A|B_2) = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}$
Stosujemy wzór na prawdopodobieństwo całkowite
$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{15}{22} \cdot \frac{3}{8} + \frac{7}{22} \cdot \frac{5}{8} = \frac{45}{176} + \frac{35}{176} = \frac{80}{176} = \frac{40}{88} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}$

Zad 12. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ wyznaczyć styczne równoległe do $y = 4x$ czyli styczne które mają współczynnik kierunkowy $a = 4$
$f'(x) = 3x^2 - 4x$ - pochodna w punkcie równa się współczynnikowi kierunkowemu stycznej czyli
$3x^2 - 4x = 4$
$3x^2 - 4x - 4 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 16 + 48 = 64 \qquad \sqrt{64} = 8$

$x_1 = \frac{4-8}{2\cdot3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$ $\quad x_2 = \frac{4+8}{2\cdot3} = \frac{12}{6} = 2$

Dla $x_1 = -\frac{2}{3}$ mamy:

$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1 = -\frac{8}{27} - 2\cdot\frac{4}{9} + 1 = -\frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 1 = -\frac{8}{27} - \frac{24}{27} + 1 = -\frac{32}{27} + \frac{27}{27} = -\frac{5}{27}$ Styczna ma $a = 4$ oraz przechodzi przez punkt $A = \left(-\frac{2}{3};\ -\frac{5}{27}\right)$

Styczna ma postać $y = a(x - x_0) + y_0$

$y = 4\left(x + \frac{2}{3}\right) - \frac{5}{27} \quad \Rightarrow \quad y = 4x + \frac{8}{3} - \frac{5}{27} \quad \Rightarrow \quad y = 4x + \frac{72}{27} - \frac{5}{27}$

ostatecznie $y = 4x + \frac{67}{27}$

Dla $x_2 = 2$ mamy:

$f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 + 1 = 8 - 2\cdot4 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$

Styczna ma $a = 4$ oraz przechodzi przez punkt $A = (2;\ 1)$

Styczna ma postać $y = a(x - x_0) + y_0$ $\quad y = 4(x-2) + 1 \quad \Rightarrow \quad y = 4x - 8 + 1$

ostatecznie $y = 4x - 7$

Odpowiedź proste spełniające warunki zadania to $y = 4x + \frac{67}{27}$ oraz $y = 4x - 7$

Zad 13. $f(x) = (m+1)x^2 + 2(m-2)x - m + 4$ pierwiastki spełniają warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$

1) Aby funkcja była funkcją kwadratową $m + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \neq -1$

2) Aby istniały dwa różne pierwiastki to $\Delta > 0$

$\Delta = (2m-4)^2 - 4(m+1)(-m+4) = 4m^2 - 16m + 16 - 4(-m^2 + 4m - m + 4)$

$\Delta = 4m^2 - 16m + 16 + 4m^2 - 16m + 4m - 16 = 8m^2 - 28m$

$8m^2 - 28m > 0 | :4$

$2m^2 - 7m > 0$

$m(2m-7) > 0 \quad m_1 = 0 \quad \vee \quad 2m - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_2 = \frac{7}{2} = 3{,}5$

$m \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (3{,}5;\ +\infty)$

3) pierwiastki spełniają warunek $x_1^2 - x_2^2 = x_1^4 - x_2^4$

$x_1^2 - x_2^2 = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)$

$x_1^2 - x_2^2 - (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = 0$

$(x_1^2 - x_2^2)[1 - (x_1^2 + x_2^2)] = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)[1 - (x_1^2 + x_2^2)] = 0$

$x_1 - x_2 = 0 \quad \vee \quad x_1 + x_2 = 0 \quad \vee \quad 1 - (x_1^2 + x_2^2) = 0$

a) $x_1 - x_2 = 0$ czyli $x_1 = x_2$ sprzeczne z założeniem że są 2 różne pierwiastki

b) $x_1 + x_2 = 0$ czyli z wzoru Viete'a mamy $-\frac{b}{a} = \frac{4-2m}{m+1} = 0$

$4 - 2m = 0 \quad \Rightarrow \quad -2m = -4 \quad \Rightarrow \quad m = 2$ nie należy do przedziału z punktu 2.

c) $1 - (x_1^2 + x_2^2) = 0$

$1 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = 0$

$1 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 = 0$ $\quad$ z wzoru Viete'a $x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m+4}{m+1}$

$1 - \left(\frac{4-2m}{m+1}\right)^2 + 2\frac{-m+4}{m+1} = 0$

$1 - \frac{16-16m+4m^2}{(m+1)^2} + \frac{8-2m}{m+1} = 0$

$\frac{(m+1)^2}{(m+1)^2} - \frac{16-16m+4m^2}{(m+1)^2} + \frac{(m+1)(8-2m)}{(m+1)^2} = 0$ mamy wspólny mianownik który można opuścić

$m^2 + 2m + 1 - 16 + 16m - 4m^2 + 8m - 2m^2 + 8 - 2m = 0$

$-5m^2 + 24m - 7 = 0$

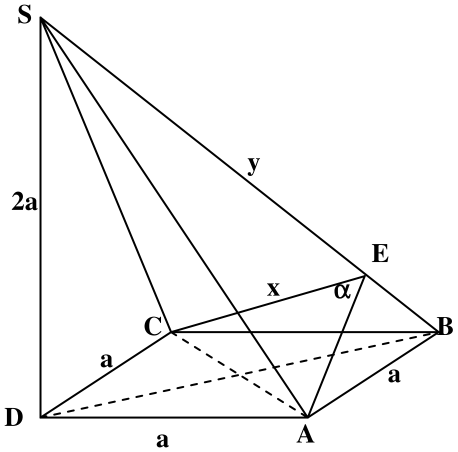
$\Delta = 24^2 - 4\cdot(-5)\cdot(-7) = 576 - 140 = 436 \qquad \sqrt{436} = \sqrt{4\cdot109} = 2\sqrt{109}$

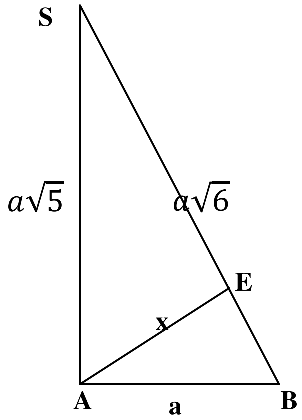
$m_1 = \frac{-24-2\sqrt{109}}{-10} = \frac{12+\sqrt{109}}{5} \approx \frac{12+10{,}44}{5} = 4{,}88$ należy do przedziału określonego w p. 2

$m_2 = \frac{12-\sqrt{109}}{5} \approx \frac{12-10{,}44}{5} = 0{,}312$ - nie należy do przedziału określonego w punkcie 2

Odpowiedź Istnieje jedno m spełniające warunki zadania $m = \frac{12+\sqrt{109}}{5}$

Zad 14.





$AC = DB = a\sqrt{2}$

Mamy trójkąt prostokątny DBS. $(2a)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = y^2$

$4a^2 + 2a^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 6a^2 \quad \Rightarrow \quad y = a\sqrt{6} \quad SB = a\sqrt{6}$

Mamy też trójkąty prostokątne DAS i DCS

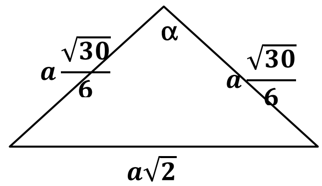
$(2a)^2 + a^2 = AS^2 \quad \Rightarrow \quad AS^2 = 5a^2 \quad \Rightarrow \quad AS = a\sqrt{5}$

Rozpatrujemy teraz trójkąt prostokątny ABS z wysokością AE poprowadzoną z wierzchołka A kąta prostego. Trójkąty ABS, ABE i AES są podobne bo są prostokątne i mają parami jeden kąt ostry wspólny.

$\frac{a\sqrt{5}}{x} = \frac{a\sqrt{6}}{a} \quad \Rightarrow \quad a \cdot a\sqrt{5} = x \cdot a\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a \cdot a\sqrt{5}}{a\sqrt{6}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = a\frac{\sqrt{30}}{6}$

mamy teraz trójkąt równoramienny ACE

Z twierdzenia cosinusów mamy:



$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(a\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{30}}{6}\right)^2 - 2 \cdot a\frac{\sqrt{30}}{6} \cdot a\frac{\sqrt{30}}{6} \cdot \cos\alpha$

$2a^2 = \frac{30}{36}a^2 + \frac{30}{36}a^2 - 2\frac{30}{36}a^2 \cdot \cos\alpha$

$2a^2 = \frac{5}{6}a^2 + \frac{5}{6}a^2 - \frac{10}{6}a^2 \cdot \cos\alpha$

$2a^2 = \frac{10}{6}a^2 - \frac{10}{6}a^2 \cdot \cos\alpha$

$\frac{10}{6}a^2 \cdot \cos\alpha = \frac{10}{6}a^2 - 2a^2$

$\cos\alpha = \frac{\frac{10}{6}a^2 - 2a^2}{\frac{10}{6}a^2} = \frac{-\frac{2}{6}a^2}{\frac{10}{6}a^2} = -\frac{2}{6} \cdot \frac{6}{10} = -\frac{1}{5}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25} \qquad \sin\alpha = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{\sqrt{4 \cdot 6}}{5} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

Odpowiedź: Sinus kąta między ścianami ABS i BCS wynosi $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Zad 15. $W(x) = x^2 + ax^2 + bx + c$

Jeżeli $\{y;\ y+3;\ \ y+6\}$ pierwiastki tego wielomiany tworzą ciąg arytmetyczny to wielomian można zapisać:

$(x-y)(x-y-3)(x-y-6) = (x^2 - xy - 3x - xy + y^2 + 3y)(x-y-6) =$

$(x^2 - 2xy - 3x + y^2 + 3y)(x-y-6) =$

$x^3 - x^2y - 6x^2 - 2x^2y + 2xy^2 + 12xy + xy^2 - y^3 - 6y^2 - 3x^2 + 3xy + 18x + 3xy - 3y^2 - 18y =$

$x^3 - 3x^2y - 9x^2 + 3xy^2 + 18xy + 18x - y^3 - 9y^2 - 18y =$

$= x^3 - x^2(3y+9) + x(3y^2 + 18y + 18) - y^3 - 9y^2 - 18y$

$\begin{cases} a = -3y - 9 \\ b = 3y^2 + 18y + 18 \\ c = -y^3 - 9y^2 - 18y \end{cases}$ w zadaniu mamy że $1 + a + b + c = 0$ czyli $a + b + c = -1$

Dodając do siebie wszystkie trzy równania z układu otrzymujemy:

$-3y - 9 + 3y^2 + 18y + 18 - y^3 - 9y^2 - 18y = -1$

$-y^3 - 6y^2 - 3y + 10 = 0$ łatwo zauważyć że pierwiastkiem tego równania jest $y = 1$

$$
\begin{array}{l}
-\dot{y}^2-7y-10 \\
\hline
-y^3-6y^2-3y+10:(y-1) \\
\underline{y^3-y^2} \\
\quad -7y^2-3y \\
\quad \underline{7y^2-7y} \\
\qquad -10y+10 \\
\qquad \underline{10y-10}
\end{array}
$$

teraz znajdziemy pierwiastki wyniku z dzielenia $-\dot{y}^2-7y-10=0$

$\Delta=(-7)^2-4\cdot(-1)\cdot(-10)=49-40=9 \qquad \sqrt{9}=3$

$y_2=\frac{7-3}{2\cdot(-1)}=\frac{4}{-2}=-2 \qquad y_3=\frac{7+3}{2\cdot(-1)}=\frac{10}{-2}=-5$

Odpowiedzi:

Dla y = 1 mamy: pierwiastki wielomianu $\{x_1=1; \quad x_2=4; \quad x_1=7;\}$ natomiast współczynniki wielomianu: $a=-3y-9=-3\cdot1-9=-3-9=-12$

$b=3y^2+18y+18=3\cdot1^2+18\cdot1+18=3+18+18=39$

$c=-y^3-9y^2-18y=-(1^3)-9\cdot1^2-18\cdot1=-1-9-18=-28$

Dla $y=-2$ mamy: pierwiastki wielomianu $\{x_1=-2; \quad x_2=1; \quad x_1=4;\}$ natomiast współczynniki wielomianu: $a=-3y-9=-3\cdot(-2)-9=6-9=-3$

$b=3y^2+18y+18=3\cdot(-2)^2+18\cdot(-2)+18=12-36+18=-6$

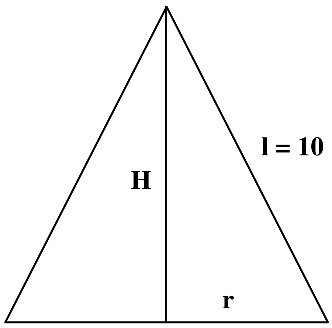
$c=-y^3-9y^2-18y=-(-2)^3-9\cdot(-2)^2-18\cdot(-2)=8-36+36=8$

Dla $y=-5$ mamy: pierwiastki wielomianu $\{x_1=-5; \quad x_2=-2; \quad x_1=1;\}$ natomiast współczynniki wielomianu: $a=-3\cdot(-5)-9=15-9=6$

$b=3y^2+18y+18=3\cdot(-5)^2+18\cdot(-5)+18=75-90+18=3$

$c=-y^3-9y^2-18y=-(-5)^3-9\cdot(-5)^2-18\cdot(-5)=125-225+90=-10$

Zad 16.



$2r+2l=20 \quad \Rightarrow \quad r+l=10 \quad \Rightarrow \quad l=10-r$

$H^2+r^2=(10-r)^2$

$H^2+r^2=100-20r+r^2$

$H^2=100-20r+r^2-r^2$

$H^2=100-20r \quad \Rightarrow H=\sqrt{100-20r}$

$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot H=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{100-20r}=\frac{\pi}{3}\sqrt{100r^4-20r^5}$

$V(r)=\frac{\pi}{3}\sqrt{100r^4-20r^5}$ interesuje nas tylko dziedzina $r\epsilon(0; \quad 5)$ bo dla innych r stożek nie istnieje. Obliczenie pochodnej takiej funkcji jest trochę trudne ale o wiele łatwiej zbadać funkcję i określić jej maksimum $f(x)=100r^4-20r^5$ dla $x\epsilon(0; \quad 5)$ Maksima tych funkcji pokrywają się bo funkcja $g(t)=\frac{\pi}{3}\sqrt{t}$ jako ciągła i rosnąca na tym przedziale nie powoduje zmiany miejsca maksimum jeśli chodzi o $V(r)$ oraz $f(x)$.

$f'(x)=400r^3-100r^4$

$400r^3-100r^4=0$

$100r^3(4-r)=0$

$100r^3=0 \qquad \vee \qquad 4-r=0$

$r=0 \quad \notin (0; \quad 5) \qquad \vee \qquad r=4$

łatwo zauważyć że dla $r = 4$ jest maksimum, bo dla $r > 4$ $(4 - r) < 0$ jak też dla $r < 4$ $(4 - r) > 0$
gdy $r = 4$ to $H = \sqrt{100 - 20r} = \sqrt{100 - 20 \cdot 4} = \sqrt{100 - 80} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H = \frac{\pi}{3} 4^2 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{\pi}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{5} = \frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$