Listopad 2016 rok (poziom rozszerzony)
Zadania zamknięte

Zad 1. $||x+3|-5|<2$

$|x+3|-5<2 \quad \wedge \quad |x+3|-5>-2$

$|x+3|<7 \quad \wedge \quad |x+3|>3$

$x+3<7 \quad \wedge \quad x+3>-7 \quad \wedge \quad x+3<-3 \quad \vee \quad x+3>3$

$x<4 \quad \wedge \quad x>-10 \quad \wedge \quad x<-6 \quad \vee \quad x>0$

$x \in (-10;\ \ 4) \quad \wedge \quad x \in (-\infty;\ \ -6) \cup (0;\ \ +\infty)$

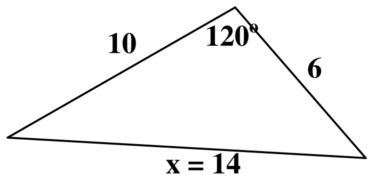
$x \in (-10;\ \ 4) \cap [(-\infty;\ \ -6) \cup (0;\ \ +\infty)] = (-10;\ \ -6) \cup (0;\ \ 4)$

(A)

Zad 2. $\tan 22{,}5° + \frac{1}{\tan 22{,}5°} = \frac{\sin 22{,}5°}{\cos 22{,}5°} + \frac{\cos 22{,}5°}{\sin 22{,}5°} = \frac{\sin^2 22{,}5° + \cos^2 22{,}5°}{\sin 22{,}5° \cdot \cos 22{,}5°} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2\sin 22{,}5° \cdot \cos 22{,}5°} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \sin 45°} =$

$= \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ **(A)**

Zad 3. Z twierdzenia cosinusów obliczymy trzeci bok



$x^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 100 + 36 - 2 \cdot 60 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 100 + 36 + 60 = 196 \qquad x = \sqrt{196} = 14$

Teraz z twierdzenia sinusów mamy

$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$ czyli $\frac{14}{\sin 120°} = 2R \qquad 2R \cdot \sin 120° = 14$

$R = \frac{14}{2\sin 120°} = \frac{14}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14}{\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$ **(C)**

Zad 4. $W(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3$

$W'(x) = x^3 + 2x^2$ Aby było ekstremum to $W'(x) = 0$

$x^3 + 2x^2 = 0$

$x^2(x+2) = 0 \qquad x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = -2$

Mamy 2 punkty podejrzane o ekstremum ale łatwo zauważyć że dla $x = 0$ znak pochodnej się nie zmienia. Wyrażenie $x^2(x+2)$ ma wartość dodatnią zarówno dla liczb dodatnich (co oczywiste) ale tak samo dla liczb ujemnych większych od – 2.

Ekstremum istnieje tylko dla $x = -2$ **(B)**

Zad 5. $\log_6 5 + 2\log_{36} 3 = \log_6 5 + 2\frac{\log_6 3}{\log_6 36} = \log_6 5 + 2\frac{\log_6 3}{2} = \log_6 5 + \log_6 3 = \log_6(5 \cdot 3) =$

$\log_6 15$ **(C)**

Zad 6. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n^2-5n-7}{5n^2+3n+2} - \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^3\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n^2-5n-7}{5n^2+3n+2} - \left(\frac{8n^3-12n^2+6n-1}{27n^3+27n^2+9n+1}\right)\right] =$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-5n-7}{5n^2+3n+2} - \lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-12n^2+6n-1}{27n^3+27n^2+9n+1} = \frac{3}{5} - \frac{8}{27} = \frac{81-40}{135} = \frac{41}{135} = 0{,}3(037)$

Odpowiedź: $\boxed{0}\boxed{3}\boxed{0}$

Zad 7. $x^3 + x^2 - 7x + 5 = 0$

Łatwo zauważyć że $x_1 = 1 \qquad 1^3 + 1^2 - 7 \cdot 1 + 5 = 2 - 7 + 5 = 0$

Teraz dzielimy wielomian $x^3 + x^2 - 7x + 5$ metodą Hornera przez $x - 1$

	1	1	- 7	5
obliczenia		$1 \cdot 1 + 1 = 2$	$1 \cdot 2 - 7 = -5$	$1 \cdot (-5) + 5 = 0$
pierwiastek 1	1	2	- 5	

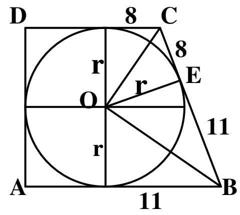
Otrzymaliśmy wielomian $x^2 + 2x - 5$ więc rozwiązujemy równanie: $x^2 + 2x - 5 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 4 + 20 = 24 \qquad \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$

$x_2 = \frac{-2-2\sqrt{6}}{2} = \frac{-2(1+\sqrt{6})}{2} = -1 - \sqrt{6} \qquad x_3 = \frac{-2+2\sqrt{6}}{2} = -1 + \sqrt{6}$

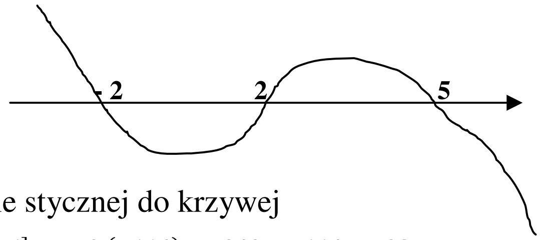
największy z pierwiastków to $x_3 = -1 + \sqrt{6} \approx -1 + 2{,}4494 \ldots = 1{,}4494 \ldots$

Odpowiedź $\boxed{1}\boxed{4}\boxed{4}$



Zad 8. Trójkąty OEC i OBE są prostokątne (kąt stycznej BC z promieniem OE = 90°)
i są podobne do trójkąta OBC, czyli trójkąt OBC prostokątny.
Tak więc odcinek OE = r jest wysokością w OBC
Znana jest zależność $r^2 = |BE| \cdot |EC|$
$r^2 = 11 \cdot 8 = 88$ $\qquad r = \sqrt{88} = \sqrt{4 \cdot 22} = 2\sqrt{22}$
$Ob = 4r + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 11 = 4 \cdot 2\sqrt{22} + 16 + 22 = 8\sqrt{22} + 38 \approx 8 \cdot 4{,}69041 \ldots + 38 =$
$= 37{,}5233 \ldots + 38 = 75{,}5233 \ldots$
Odpowiedź: $\boxed{7}\,\boxed{5}\,\boxed{5}$

Zad 9. $W = \sqrt{\frac{x-5}{4-x^2}}$ Dziedzina tego wyrażenia musi spełniac warunki:
$\frac{x-5}{4-x^2} \geq 0$ oraz $4 - x^2 \neq 0$ czyli $x \neq 2 \quad \wedge \quad x \neq -2$
$\frac{x-5}{4-x^2} \geq 0$ jeżeli iloraz ma być ≥ 0 to i iloczyn tak samo $(x-5)(4-x^2) \geq 0$
$(x-5)(2-x)(2+x) \geq 0$
miejsca zerowe $x_1 = 5$ $\qquad x_2 = 2$ $\qquad x_3 = -2$



Odpowiedź: $x \in (-\infty;\ \ -2) \cup (2;\ \ 5\rangle$

Zad 10. $f(x) = \frac{3}{x^4+x^2-75}$ $\qquad P = \left(-3;\ \ \frac{1}{5}\right)$ napisać równanie stycznej do krzywej
$f'(x) = \frac{-3(4x^3+2x)}{(x^4+x^2-75)^2}$ $\quad f'(-3) = \frac{-3[4\cdot(-3)^3+2\cdot(-3)]}{[(-3)^4+(-3)^2-75]^2} = \frac{-3[4\cdot(-27)-6]}{(81+9-75)^2} = \frac{-3\cdot(-114)}{15^2} = \frac{342}{225} = \frac{114}{75} = \frac{38}{25} = a$
Styczna do krzywej ma postać $y = ax + b$ gdzie $a = f'(x_0)$ czyli $y = \frac{38}{25}x + b$
i przechodzi przez punkt $P = \left(-3;\ \ \frac{1}{5}\right)$ czyli
$\frac{1}{5} = \frac{38}{25} \cdot (-3) + b$ $\qquad \frac{1}{5} = \frac{-114}{25} + b$ $\qquad b = \frac{5}{25} + \frac{114}{25} = \frac{119}{25}$
Odpowiedź: Równanie stycznej do krzywej $f(x) = \frac{3}{x^4+x^2-75}$ w punkcie $P = \left(-3;\ \ \frac{1}{5}\right)$ ma postać
$y = \frac{38}{25}x + \frac{119}{25}$

Zad 11. Jeżeli $a > 0\ i\ b > 0$ to $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 8$
Na początek trzeba wiedzieć że $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
Wykażemy to:
Sprowadzając do wspólnego mianownika mamy: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} = \frac{a^2+b^2}{ab}$
Czyli mamy do wykazania $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ po pomnożeniu przez ab mamy $a^2 + b^2 \geq 2ab$
$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ czyli $(a-b)^2 \geq 0$ co kończy dowód faktu że $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ gdyż kwadrat liczby jest liczbą nieujemną.
Jeżeli wykazaliśmy że $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ to analogicznie wykażemy że $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2$
$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^4+b^4}{a^2b^2}$ czyli mamy do wykazania że $\frac{a^4+b^4}{a^2b^2} \geq 2$ lub $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2$
co dalej daje $a^4 + b^4 - 2a^2b^2 \geq 0$ czyli $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$
Mamy więc wykazane że $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2$ oraz $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ czyli $3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 3 \cdot 2 = 6$
co wstawiając do nierówności początkowej daje nam że lewa strona jest większa od $2 + 6 = 8$

Zad 12. $S = \frac{a_1}{1-q} = 40$ a suma nieparzystych $\{a_1; \quad a_3 = a_1 \cdot q^2; \quad a_5 = a_1 \cdot q^4; \ldots\}$ $S_1 = \frac{a_1}{1-q^2} = 32$

dodatkowo musi to być ciąg zbieżny czyli: $|q| < 1$

Mamy więc do rozwiązania układ równań: $\begin{cases} \frac{a_1}{1-q} = 40 | \cdot (1-q) \\ \frac{a_1}{1-q^2} = 32 | \cdot (1-q^2) \end{cases}$ $\qquad |q| < 1$

$\begin{cases} a_1 = 40(1-q) \\ a_1 = 32(1-q^2) \end{cases}$ Przyrównując I równanie do II otrzymujemy

$40(1-q) = 32(1-q^2)$

$40 - 40q = 32 - 32q^2$

$32q^2 - 40q + 8 = 0 |: 8$

$4q^2 - 5q + 1 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9 \qquad \sqrt{9} = 3$

$q_1 = \frac{5-3}{2 \cdot 4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad q_2 = \frac{5+3}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1 \qquad q_2 = 1$ niezgodne z założeniem $|q| < 1$

dla $q = \frac{1}{4}$ mamy $a_1 = 40(1-q) = 40\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 40 \cdot \frac{3}{4} = 30$

Odpowiedź: Jest to ciąg geometryczny o wyrazie pierwszym $a_1 = 30$ i ilorazie $q = \frac{1}{4}$

Zad 13. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha - \beta)$

$(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\beta) = \sin(\alpha - \beta)$

$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin(\alpha - \beta)$ **(mnożenie jest łączne czyli zamieniamy kolejność czynników)**

$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin(\alpha - \beta)$

$\sin\left(2 \cdot \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \sin\left(2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin(\alpha - \beta)$

$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha - \beta)$

$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 0$

$\sin(\alpha - \beta)\,[\sin(\alpha + \beta) - 1] = 0$

$\sin(\alpha - \beta) = 0 \qquad \vee \qquad \sin(\alpha + \beta) - 1 = 0$

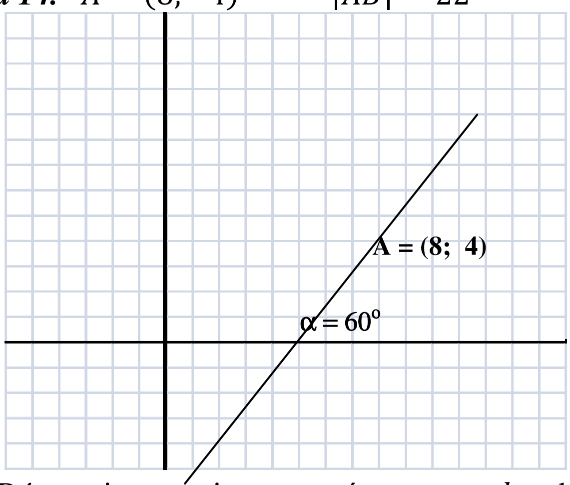
$\alpha - \beta = 0 \qquad \vee \qquad \sin(\alpha + \beta) = 1$

$\alpha = \beta \qquad \vee \qquad \alpha + \beta = 90°$

Jeżeli $\alpha = \beta$ to trójkąt jest równoramienny. Jeżeli $\alpha + \beta = 90°$ to trójkąt jest prostokątny.

Czyli osiągnęliśmy tezę zadania.

Zad 14. $A = (8; \quad 4) \qquad |AB| = 22 \qquad \alpha = 60°$ kąt prostej AB z osią OX



Równanie prostej ma postać $y = ax + b$ gdzie $a = \tan\alpha = \tan 60° = \sqrt{3}$

Prosta więc ma postać $y = \sqrt{3}x + b$ i przechodzi przez $A = (8; \quad 4)$

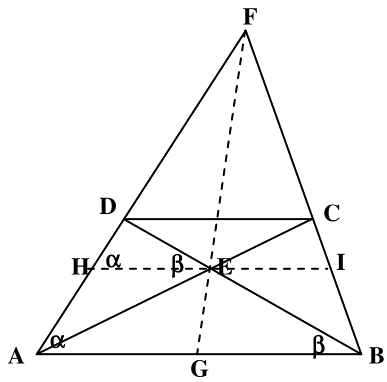
Mamy więc $4 = \sqrt{3} \cdot 8 + b$ czyli $b = 4 - 8\sqrt{3}$

Prosta więc ma postać $y = \sqrt{3}x + 4 - 8\sqrt{3}$

Punkty leżące na tej prostej mają współrzędne $\left(x; \quad \sqrt{3}x + 4 - 8\sqrt{3}\right)$

Teraz korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$(x-8)^2+\left(\sqrt{3}x+4-8\sqrt{3}-4\right)^2=22^2$
$(x-8)^2+\left(\sqrt{3}x-8\sqrt{3}\right)^2=484$
$x^2-16x+64+3x^2-48x+192=484$
$4x^2-64x+256-484=0$
$4x^2-64x-228=0|:4$
$x^2-16x-57=0$
$\Delta=(-16)^2-4\cdot1\cdot(-57)=512+228=484$ $\qquad \sqrt{484}=22$
$x_1=\frac{16-22}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ $\qquad x_2=\frac{16+22}{2}=\frac{38}{2}=19$
Dla $x_1=-3$ $\qquad y_1=\sqrt{3}\cdot(-3)+4-8\sqrt{3}=4-11\sqrt{3}$
Dla $x_2=19$ $\qquad y_2=\sqrt{3}\cdot19+4-8\sqrt{3}=4+11\sqrt{3}$
Odpowiedź: Mamy dwa punkty spełniające warunki zadania:
$B_1=\left(-3;\ \ 4-11\sqrt{3}\right)$ $\qquad B_2=\left(19;\ \ 4+11\sqrt{3}\right)$



Zad 15. Dany jest trapez ABCD i jego przekątne przecinają się w E
Wykażemy że G dzieli bok AB na połowy.
Prowadzimy odcinek HI przechodzący przez E i $HI||AB||CD$
Trójkąty ABD i HED są podobne
$\sphericalangle ADB=\sphericalangle HDE$ – wspólny $\sphericalangle DAB=\sphericalangle DHE$ – odpowiadające
$\sphericalangle DBA=\sphericalangle DEH$ – odpowiadające
Analogicznie trójkąty ABC i EIC
Wysokości trójkątów HED i EIC są jednakowe – oznaczmy ***h***
Wysokości trójkątów ABD i ABC też jednakowe – oznaczmy ***H***
W trójkątach podobnych stosunki odpowiednich odcinków są równe.
Mamy więc: $\frac{AB}{HE}=\frac{H}{h}$ oraz $\frac{AB}{EI}=\frac{H}{h}$ Z równości tych wynika że $HE=EI$
Teraz w podobny sposób wykażemy że trójkąty AGF i HEF są podobne
Są to też trójkąty o wspólnym kącie $\sphericalangle AFG=\sphericalangle HFE$ oraz
$\sphericalangle FAG=\sphericalangle FHE$ i $\sphericalangle FGA=\sphericalangle FEH$ jako odpowiadające
Identycznie wykazujemy że trójkąty BFG i IFE są podobne.
Teraz tak samo jak w I części dowodu stwierdzamy że trójkąty HEF i IEF mają wspólną wysokość $\boldsymbol{h_1}$
oraz trójkąty AGF i BGF mają wspólną wysokość $\boldsymbol{h_2}$
W trójkątach podobnych możemy zapisać stosunki odpowiednich odcinków:
$\frac{HE}{AG}=\frac{h_1}{h_2}$ oraz $\frac{IE}{BG}=\frac{h_1}{h_2}$ Z faktu że $HE=EI$ wynika $AG=BG$ ***Co było do wykazania.***

Zad 16. Mamy w urnie 5 kul białych i 7 czarnych
Losujemy dwie kule więc może być 3 różne wyniki tego losowania $\{bb;\ \ bc;\ \ cc\}$
Obliczamy prawdopodobieństwo każdego takiego wyniku
Wszystkich wyników tego losowania jest: $\overline{\overline{\Omega}}=\binom{5+7}{2}=\binom{12}{2}=\frac{12!}{2!\cdot10!}=\frac{11\cdot12}{1\cdot2}=11\cdot6=66$
I – Zdarzenie B_1 wylosowano dwie kule białe $\overline{\overline{B_1}}=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot3!}=\frac{4\cdot5}{1\cdot2}=2\cdot5=10$ $\quad P(B_1)=\frac{10}{66}=\frac{5}{33}$
II – Zdarzenie B_2 wylosowano kulę białą i kule czarną $\overline{\overline{B_1}}=5\cdot7=35$ $\qquad P(B_2)=\frac{35}{66}$
III – Zdarzenie B_3 wylosowano dwie kule czarne $\overline{\overline{B_3}}=\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!\cdot5!}=\frac{6\cdot7}{1\cdot2}=3\cdot7=21$
$P(B_3)=\frac{21}{66}=\frac{7}{22}$
Teraz liczymy prawdopodobieństwa warunkowe dla każdej sytuacji.
W urnie zostało $12-2=10$ kul. Dla losowania 1 kuli mamy $\overline{\overline{\Omega}}=10$
A) Odłożono 2 kule białe więc zostało 3 białe i 7 czarnych. Aby wylosować kulę białą mamy 3 możliwości $\quad P(A|B_1)=\frac{3}{10}$
B) Odłożono 1 kulę białą i jedną czarną więc zostało 4 kule białe i 6 czarnych.
Aby wylosować kulę białą mamy 4 możliwości $\quad P(A|B_2)=\frac{4}{10}$

C) Odłożono 2 kule czarne więc zostało 5 białych i 5 czarnych. Aby wylosować kulę białą mamy 5 możliwości $P(A|B_3) = \frac{5}{10}$

Liczymy teraz prawdopodobieństwo całkowite:

$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{33} + \frac{4}{10} \cdot \frac{35}{66} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{22} = \frac{1}{22} + \frac{7}{33} + \frac{7}{44} = \frac{6}{132} + \frac{28}{132} + \frac{21}{132} = \frac{55}{132} = \frac{5}{12}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo tego że w II losowaniu wylosujemy kulę białą wynosi $\frac{5}{12}$.

Zad 17. $f(x) = (m+1)x^2 - (2m-2)x - 2(m-1)$

kiedy $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} < 2$

trójmian $(m+1)x^2 - (2m-2)x - 2(m-1)$ musi spełniać warunki:

I) $a \neq 0$ aby trójmian był kwadratowy, czyli $m + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m \neq -1$

II) $\Delta > 0$ aby istniały 2 pierwiastki $a = m + 1$; $b = -(2m-2)$; $c = -2(m-1) = -2m + 2$

$\Delta = [-(2m-2)]^2 - 4(m+1)(-2m+2) = 4m^2 - 8m + 4 - 4(-2m^2 + 2m - 2m + 2) =:$

$= 4m^2 - 8m + 4 + 8m^2 - 8 = 12m^2 - 8m - 4$

$12m^2 - 8m - 4 > 0 |: 4 \qquad \Rightarrow \qquad 3m^2 - 2m - 1 > 0 :$

$\Delta_1 = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16 \qquad \sqrt{16} = 4$

$m_1 = \frac{2-4}{3 \cdot 2} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \qquad m_2 = \frac{2+4}{3 \cdot 2} = \frac{6}{6} = 1$

$m \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right) \cup (1;\ +\infty)$

III) pierwiastki x_1; x_2 mają spełniać warunek $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} < 2$

Z wzorów Viete'a mamy: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m-2}{m+1} = x_1 \cdot x_2$; $\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2(m-1)}{m+1}$

Dokonajmy przekształcenia wyrażenia aby można było zastosować w zadaniu wzory Viete'a:

$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \frac{b^3}{a^3b^3} + \frac{a^3}{a^3b^3} = \frac{a^3+b^3}{a^3b^3} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(ab)^3} = \frac{(a+b)(a^2+b^2-ab)}{(ab)^3} = \frac{(a+b)[(a+b)^2-2ab-ab]}{(ab)^3} =$

$= \frac{(a+b)[(a+b)^2-3ab]}{(ab)^3}$

Czyli w naszym przypadku mamy: $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2]}{(x_1 \cdot x_2)^3} = \frac{\left(\frac{2m-2}{m+1}\right)\left[\left(\frac{2m-2}{m+1}\right)^2 - 3\frac{-2(m-1)}{m+1}\right]}{\left(\frac{-2(m-1)}{m+1}\right)^3} =$

$= \left(\frac{2m-2}{m+1}\right)\left[\left(\frac{2m-2}{m+1}\right)^2 + \frac{6(m-1)}{m+1}\right] \cdot \left(\frac{m+1}{-2(m-1)}\right)^3 = \left[\left(\frac{2m-2}{m+1}\right)^3 + \left(\frac{2m-2}{m+1}\right) \cdot \frac{6(m-1)}{m+1}\right] \cdot \frac{1}{(-2)^3}\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^3 =$

$= \left[2^3\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3 + 12\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2\right] \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^3 = -1 - \frac{12}{8}\left(\frac{m+1}{m-1}\right) = -1 - \frac{3(m+1)}{2(m-1)} = -1 - \frac{3m+3}{2m-2}$

Mamy rozwiązać nierówność: $-1 - \frac{3m+3}{2m-2} < 2$ czyli $-\frac{2m-2}{2m-2} - \frac{3m+3}{2m-2} - 2 < 0$

$\frac{-2m+2-3m-3}{2m-2} - \frac{4m-4}{2m-2} < 0$

$\frac{-5m-1-4m+4}{2m-2} < 0 \qquad \frac{-9m+3}{2m-2} < 0$ czyli ostatecznie mamy:

$(-9m+3)(2m-2) < 0$

$-9m = -3 |: (-9) \qquad \vee \qquad 2m = 2 |: 2$

$m_1 = \frac{1}{3} \qquad m_2 = 1$

$m \in \left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right) \cup (1;\ +\infty)$

Teraz zostało ustalić część wspólna rozwiązań I, II, i III

Odpowiedź: $m \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right) \cup (1;\ +\infty) \backslash \{-1\}$.

Zad 18. $f(x) = \frac{2}{x} \qquad y = -\frac{4}{3}x - 2 \qquad P = \left(x;\ \frac{2}{x}\right)$

Zapiszmy równanie prostej $y = -\frac{4}{3}x - 2$ w postaci ogólnej:

$\frac{4}{3}x + y + 2 = 0 | \cdot 3 \qquad 4x + 3y + 6 = 0$

Napiszmy wzór na odległość punktu P od prostej $4x + 3y + 6 = 0$

$d = \frac{\left|4x+3\cdot\frac{2}{x}+6\right|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4x+\frac{6}{x}+6}{5} = \frac{4}{5}x + \frac{6}{5x} + \frac{6}{5}$

(z uwagi na założenie że punkt P leży w I ćwiartce wartość bezwzględna we wzorze na odległość była do pominięcia)

wzór na odległość $d = \frac{4}{5}x + \frac{6}{5x} + \frac{6}{5}$ możemy potraktować jako funkcję zmiennej x i znaleźć jej ekstremum.

$d(x) = \frac{4}{5}x + \frac{6}{5x} + \frac{6}{5}$ $\qquad D = (0;\ +\infty)$ bo odległość jest liczbą dodatnią

$d'(x) = \frac{4}{5} + \frac{-6\cdot5}{(5x)^2} = \frac{4}{5} + \frac{-6\cdot5}{25x^2} = \frac{4}{5} - \frac{6}{5x^2} = \frac{4x^2}{5x^2} - \frac{6}{5x^2} = \frac{4x^2-6}{5x^2}$

Szukamy ekstremum:

$\frac{4x^2-6}{5x^2} = 0$ czyli $4x^2 - 6 = 0 | :2$

$2x^2 - 3 = 0 \qquad 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\right) = 0 \qquad 2\left(x - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 0$

$x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad x_2 \notin D$

Badając znak pochodnej $d'(x) = \frac{4x^2-6}{5x^2}$ łatwo zauważyć że mianownik jest zawsze dodatni. Gdy weźmiemy $x < \sqrt{\frac{3}{2}}$ to $4x^2 < 6$ czyli pochodna jest ujemna. Gdy zaś weźmiemy $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$ to $4x^2 > 6$ czyli pochodna jest dodatnia. Z tego wynika że mamy minimum dla $x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$y = \frac{2}{x} = \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ tak więc $P = \left(\frac{\sqrt{6}}{2};\quad \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$

Pozostało policzyć wartość tego minimum czyli minimalną odległość prostej od krzywej.

$d(x) = \frac{4}{5}x + \frac{6}{5x} + \frac{6}{5} = \frac{4x\cdot x+6+6x}{5x} = \frac{4x^2+6x+6}{5x}$

$d\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \frac{4\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+6\sqrt{\frac{3}{2}}+6}{5\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{4\cdot\frac{3}{2}+6\sqrt{\frac{3}{2}}+6}{5\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{6+6+6\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{25\cdot3}{2}}} = \frac{12+\sqrt{\frac{36\cdot3}{2}}}{\sqrt{\frac{75}{2}}} = \left(12+\sqrt{18\cdot3}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{75}} = \left(12+\sqrt{54}\right)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{75}} =$

$= 12\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{25\cdot3}} + \sqrt{54}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{25\cdot3}} = \frac{12\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{108}}{5\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{6}}{5\cdot3} + \frac{\sqrt{36\cdot3}}{5\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{6}}{15} + \frac{6\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{6}}{5} + \frac{6}{5} = \frac{4\sqrt{6}+6}{5}$

Odpowiedź: Najmniejsza odległość punktu P leżącego na krzywej $f(x) = \frac{2}{x}$ od prostej $y = -\frac{4}{3}x - 2$ wynosi $\frac{4\sqrt{6}+6}{5}$