Rozwiązania maj 2017r.

Zadania zamknięte

Zad 1. $5^8 \cdot 16^{-2} = 5^8 \cdot (2^4)^{-2} = 5^8 \cdot 2^{-8} = \frac{5^8}{2^8} = \left(\frac{5}{2}\right)^8$ **(A)**

Zad 2. $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} - \sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$ **(C)**

Zad 3. $2\log_2 3 - 2\log_2 5 = \log_2 3^2 - \log_2 5^2 = \log_2 9 - \log_2 25 = \log_2 \frac{9}{25}$ **(A)**

Zad 4. $x + 120\%x = 8910$

$x + 1{,}2x = 8910 \implies 2{,}2x = 8910 \implies x = \frac{8910}{2{,}2} \implies x = 4050$ **(A)**

Zad 5. Najłatwiej jest zauważyć że dla $x = -1$ otrzymujemy $\left(-\sqrt{2} - 2\right)^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2$ **(C)**

Jeżeli jednak chcielibyśmy to rozwiązać to okazuje się że napotykamy na spore problemy

$\left(x\sqrt{2} - 2\right)^2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)^2 \implies 2x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2}x + 4 = 4 + 2 \cdot 2\sqrt{2} + 2 \implies$

$2x^2 - 4\sqrt{2}x = 6 + 4\sqrt{2} - 4 \implies 2x^2 - 4\sqrt{2}x = 2 + 4\sqrt{2} \implies 2x^2 - 4\sqrt{2}x - 2 - 4\sqrt{2} = 0$

$2x^2 - 4\sqrt{2}x - 2 - 4\sqrt{2} = 0$ |można podzielić przez 2

$x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 - 2\sqrt{2} = 0$ $\quad \Delta = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-1 - 2\sqrt{2}\right) = 8 + 4 + 8\sqrt{2} = 12 + 8\sqrt{2}$ Tu okazuje się że $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12 + 8\sqrt{2}}$ - i tu ciężko to obliczyć.

Faktem jest że $\left(2 + 2\sqrt{2}\right)^2 = 4 + 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} + 4 \cdot 2 = 4 + 8\sqrt{2} + 8 = 12 + 8\sqrt{2}$ czyli

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12 + 8\sqrt{2}} = 2 + 2\sqrt{2}$ tak więc

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2}-(2+2\sqrt{2})}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{2}+(2+2\sqrt{2})}{2} = \frac{2+4\sqrt{2}}{2} = 1 + 2\sqrt{2}$

Są jeszcze wzory Viete'a i one naprowadziłyby szybciej do rozwiązania.

Bo $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ czyli $x_1 + x_2 = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$ $\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{-1-\sqrt{2}}{1} = -1 - \sqrt{2}$

z tych zależności łatwo wywnioskować że $x_1 = -1 \quad x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$

Zad 6. $(x^4 + 1)(2 - x) > 0$ $\qquad (x^4 + 1) > 0$ dla każdego $x \in R$ wystarczy rozwiązać $(2 - x) > 0 \implies -x > -2 \implies x < 2$ liczba 3 nie spełnia tego warunku **(D)**

Zad 7. $2 - 3x \geq 4 \implies -3x \geq 4 - 2 \implies -3x \geq 2 \implies x \leq -\frac{2}{3}$ **(D)**

Zad 8. $x(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$x = 0 \lor x - 2 = 0 \lor x + 2 = 0 \lor x^2 + 4 = 0$

$x_1 = 0 \lor x_2 = 2 \lor x_3 = -2$ a równanie $x^2 + 4 = 0$ nie ma rozwiązań **(C)**

Zad 9. $f(x) = \sqrt{3}(x + 1) - 12 \quad f(x) = \sqrt{3}x + \sqrt{3} - 12$

miejsce zerowe $x_0 = \frac{-b}{a} = \frac{-(\sqrt{3}-12)}{\sqrt{3}} = \frac{(-\sqrt{3}+12)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-3+12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} - 1$ **(C)**

Zad 10. Znając własność funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ mówiącą że wykres każdej takiej funkcji przecina oś Y w punkcie (0; c) oczywistym jest że c = 3 co widać z wykresu. Nie wiem po co w zadaniu jest podane wiele danych nie koniecznych do podania odpowiedzi. Dane te byłyby niezbędne gdyby zadanie pytało o pełny wzór tej funkcji. **(C)**

Zad 11. Dla funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ definicja mówi $a > 0 \land a \neq 1$. Wiemy też że dla $a > 1$ funkcja jest rosnąca co widać na tym wykresie oraz mamy $2^1 = 2$. **(D)**

Zad 12. $a_1 = 5 \quad a_2 = 11$ stąd $r = a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6$

$a_n = a_1 + (n - 1)r = 71 \qquad 5 + (n - 1)6 = 71$

$5 + 6n - 6 = 71$

$6n = 71 + 1 \implies 6n = 72 \implies n = \frac{72}{6} \implies n = 12 \quad a_{12} = 71$ **(B)**

Zad 13. Ciąg geometryczny $(24; \quad 6; \quad a-1)$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

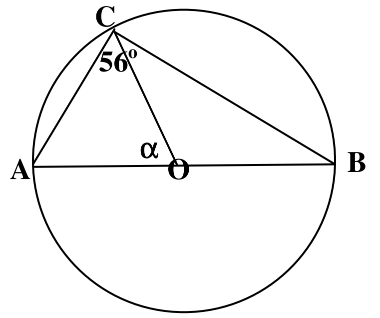
$a_3 = a_2 \cdot q = 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 1{,}5$

$a - 1 = 1{,}5$

$a = 2{,}5 = \frac{5}{2}$ **(A)**

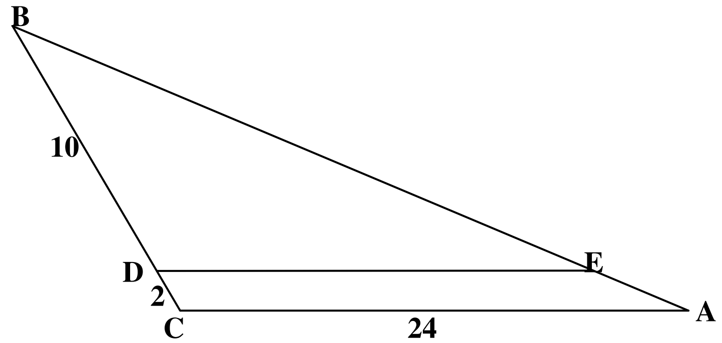
Zad 14. $m = \sin 50°$ z faktu że $\sin\alpha = (\cos 90° - \alpha)$ mamy $m = \cos 40°$ **(B)**

Zad 15.



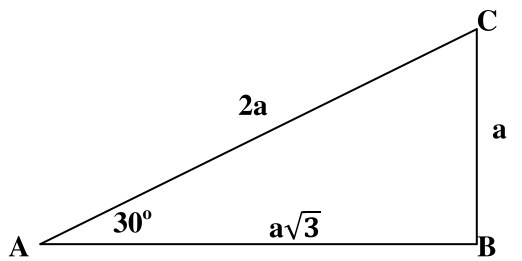
Trójkąt AOC jest równoramienny |AO| = |CO| więc $\sphericalangle CAO = 56°$ $\sphericalangle AOB = 180° = 2 \cdot 56° = 180° - 112° = 68°$ $\alpha = 180° - 68° = 112°$ **(C)**

Zad 16.



Z uwagi na to że odcinki AC i DE są równoległe więc trójkąty ABC i EBD są podobne więc odpowiednie odcinki są proporcjonalne. Mamy $\frac{BC}{CA} = \frac{BD}{DE} \implies \frac{12}{24} = \frac{10}{x} \implies x = 20$ **(B)**

Zad 17.



Już uczeń gimnazjum bądź klasy VIII wie że w trójkącie prostokątnym z kątem ostrym 30° długości boków się kształtują tak jak na rysunku. Czyli obwód wynosi $a + 2a + a\sqrt{3} = 3a + a\sqrt{3}0 = a\left(3 + \sqrt{3}\right)$

Na poziomie LO należy skorzystać z faktu $\sin 30° = \frac{1}{2}$ oraz $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)**

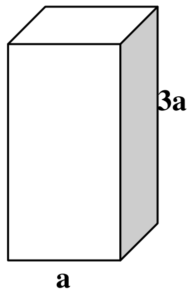
Zad 18. $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$ **(B)**

Zad 19. $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ - jej współczynnik kierunkowy $a_1 = -\frac{1}{4}$ $A = (-2; \quad 4)$ to prostopadła do niej ma współczynnik kierunkowy $a_2 = 4$ bo $a_1 \cdot a_2 = -1$ Stąd prosta prostopadłą do niej ma wzór $y = 4x + b$ i wstawiając do wzoru punkt $A = (-2; \quad 4)$ otrzymujemy $4 = 4 \cdot (-2) + b$ stąd $b = 4 + 8 = 12$ Czyli wzór funkcji o wykresie prostopadłym to $y = 4x + 12$ **(D)**

Zad 20. $S = (2; \; 3)$ $r = 5$ wstawiając do równania okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ dane z zadania mamy $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ czyli $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ łatwo zauważyć że punkt $A = (-1; \quad 7)$

spełnia warunki zadania $(-1-2)^2 + (7-3)^2 = 25$ czyli $(-3)^2 + (4)^2 = 25$ **(A)**

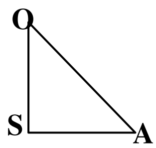
Zad 21.



Pole powierzchni całkowitej to pole dwóch kwadratowych podstaw i czterech ścian bocznych $2a^2 + 4 \cdot a \cdot 3a = 140 \;\; \Rightarrow \;\; 2a^2 + 12a^2 = 140 \;\; \Rightarrow \;\; 14a^2 = 140$

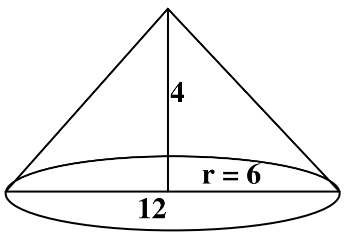
$a^2 = 10 \;\; \Rightarrow \;\; a = \sqrt{10}$ **(A)**

Zad 22.



Trójkąt SAO jest równoramienny prostokątny czyli pytanie jest o $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)**

Zad 23.



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 4 = \frac{36}{3} \cdot 4\pi = 12 \cdot 4\pi = 48\pi$ **(D)**

Zad 24. $\frac{3+5+7+9+x+15+17+19}{8} = 11 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{75+x}{8} = 11 \;\; \Rightarrow \;\; 75 + x = 88 \;\; \Rightarrow \;\; x = 88 - 75 \;\; \Rightarrow \;\; x = 13$

(D)

Zad 25. Liczby są od 1 do 24 czyli $\overline{\overline{\Omega}} = 24$ Dzielniki liczby 24 to $\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8; 12;\ 24\}$ czyli $\overline{\overline{A}} = 8$

$P(A) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ **(B)**

Zadania otwarte

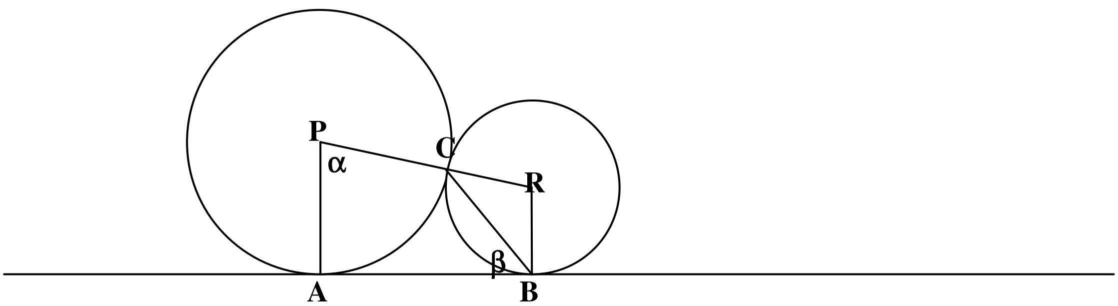
Zad 26. $8x^2 - 72x \leq 0$

$8x(x-9) \leq 0$

pierwiastki równania $8x = 0 \;\vee\; x - 9 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = 0 \;\vee\; x_2 = 9$ Dla wykresu z gałęziami do góry, wartości ≤ 0 są między pierwiastkami czyli Odpowiedź: $x \in \langle 0;\ 9 \rangle$

Zad 27. $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020} = 4^{2017}(4^0 + 4^1 + 4^2 + 4^3) = 4^{2017}(1 + 4 + 16 + 64) = 4^{2017} \cdot 85 = 4^{2017} \cdot 17 \cdot 5$ czyli przy podzieleniu przez 17 otrzymamy $4^{2017} \cdot 5$

Zad 28.



Odcinek BR (promień okręgu) prostopadły do prostej AB. $\sphericalangle CBR = 90° - \beta$. Trójkąt BRC równoramienny |BR| = |CR| więc $\sphericalangle BCR = 90° - \beta$ teraz z kątów przyległych przy punkcie C mamy $\sphericalangle PCB = 180° - \sphericalangle BCR = 180° - (90° - \beta) = 90° + \beta$. Oczywiście kąt przy wierzchołku A w czworokącie APCB jest prosty jako kąt promienia ze styczną.

Teraz dla czworokąta APCB mamy $90° + \beta + 90° + \beta + \alpha = 360°$ suma kątów w czworokącie

$180° + 2\beta + \alpha = 360° \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 360° - 180° - 2\beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 180° - 2\beta$

Zad 29. $f(x) = ax^2 + bx + c \qquad q = 6$ – największa wartość. $\qquad f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$

Zad 30. c = 26; a = x; b = x + 14 trójkąt prostokątny więc $a^2 + b^2 = c^2$ czyli $x^2 + (x + 14)^2 = 26^2$

$x^2 + x^2 + 2 \cdot 14x + 14^2 = 676$

$2x^2 + 28x + 196 - 676 = 0$

$2x^2 + 28x - 480 = 0 \quad |:2$

$x^2 + 14x - 240 = 0$

$\Delta = 14^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-240) = 196 + 960 = 1156 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{1156} = 34$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14-34}{2} = \frac{-48}{2} = -24 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-14+34}{2} = \frac{20}{2} = 10$ Rozwiązanie $x_1 = -24$ nie spełnia warunków zadania bo nie ma odcinków o długości ujemnej. Dla x = 10 mamy:

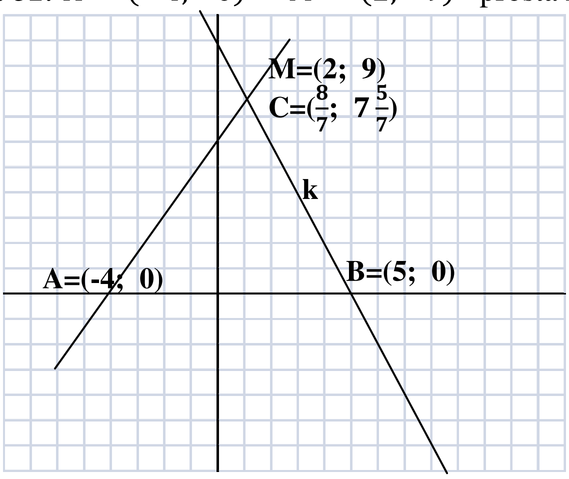
a = 10; b = 10 + 14 = 24 c = 26. Obwód = a + b + c = 10 + 24 + 26 = 60.

Zad 31. $a_1 = 8; \quad S_3 = 33$ ciąg arytmetyczny $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 3a_1 + 3r$

$3a_1 + 3r = 33 \quad \Longrightarrow \quad a_1 + r = 11 \quad \Longrightarrow \quad r = 11 - 8 \quad \Longrightarrow \quad r = 3$

$a_{16} = a_{13} = a_1 + 15r - (a_1 + 12r) = a_1 + 15r - a_1 - 12r = 3r = 3 \cdot 3 = 9$

Zad 32. $A = (-4;\ \ 0) \qquad M = (2;\ \ 9)$ prosta k $\ y = -2x + 10$



Aby wyznaczyć punkt B trzeba obliczyć miejsce zerowe podanej funkcji czyli rozwiązać równanie

$-2x + 10 = 0$

$-2x = -10 |: (-2)$

$x = 5$ **B = (5; 0)**

Teraz wyznaczymy równanie prostej na której leży punkt C czyli równanie prostej AM

współczynnik kierunkowy $a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{9-0}{2-(-4)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \quad y = 1{,}5x + b$ wstawimy teraz dany punkt

$M = (2;\ \ 9) \ \ 9 = 1{,}5 \cdot 2 + b \Longrightarrow \quad 9 = 3 + b \quad \Longrightarrow \quad b = 9 - 3 \quad \Longrightarrow \quad b = 6$

Otrzymaliśmy wzór prostej AM $y = 1{,}5x + 6$. Teraz aby obliczyć współrzędne punktu C trzeba rozwiązać układ równań $\begin{cases} y = 1{,}5x + 6 \\ y = -2x + 10 \end{cases}$

$1{,}5x + 6 = -2x + 10$

$1{,}5x + 2x = 10 - 6$

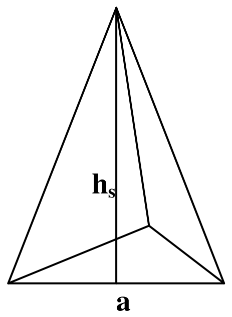
$3{,}5x = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{3{,}5} = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$

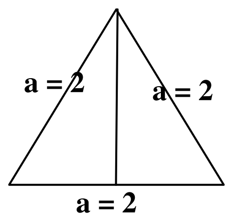
$y = 1{,}5 \cdot \frac{8}{7} + 6 = \frac{12}{7} + 6 = 7\frac{5}{7} \quad C = \left(1\frac{1}{7};\quad 7\frac{5}{7}\right)$

Podstawa |AB| = 5 – (–4) = 9 Pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7\frac{5}{7} = \frac{9}{2} \cdot \frac{54}{7} = \frac{486}{14} = \frac{243}{7} = 34\frac{5}{7}$

Zad 33. Wszystkie liczby dwucyfrowe to od 10 do 99. 99 – 9 =90 $\overline{\overline{\Omega}} = 90$ Liczby podzielne przez 3 mniejsze od 40 to $A = \{12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39\}$ $\overline{\overline{A}} = 10 \quad P(A) = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}$

Zad 34.

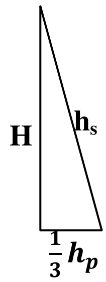




$h_s = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ - wysokość ściany bocznej $P_b = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ pole powierzchni bocznej

$P_b = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s \qquad \frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \cdot a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}$

$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{15\sqrt{3}}{8} \cdot a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{4}}{\frac{15\sqrt{3}}{8}} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{15\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{8}{15\sqrt{3}} \quad \Longrightarrow \quad a = 2$



Potrzebna jest nam wysokość ostrosłupa (**H**), aby ją policzyć trzeba wcześniej policzyć wysokość w podstawie i z trójkąta: wysokość **H**, wysokość ściany $\mathbf{h_s}$ oraz $\frac{1}{3}h_p$ wyliczymy potrzebną wysokość.

$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \frac{1}{3}h_p = \frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Teraz z Twierdzenia Pitagorasa mamy: $H^2 + \left(\frac{1}{3}h_p\right)^2 = (h_s)^2$

$H^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2$

$H^2 + \frac{3}{9} = \frac{25 \cdot 3}{16} \qquad H^2 = \frac{75}{16} - \frac{1}{3} = \frac{75 \cdot 3}{16 \cdot 3} - \frac{16}{3 \cdot 16} = \frac{225 - 16}{48} = \frac{209}{48}$

$H = \sqrt{\frac{209}{48}} = \frac{\sqrt{209}}{\sqrt{16 \cdot 3}} = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}$

Obliczamy objętość ostrosłupa $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{209}}{12}$