Czerwiec 2018 rok (poziom rozszerzony)(nowa matura)

Zadania zamknięte

Zad 1. $L = \log_{\sqrt{2}} 2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} 4 = 2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \log_{\sqrt{3}} 4 = 2 \cdot \log_2 \sqrt{3} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 \sqrt{3}} =$
$= 2 \cdot \log_2 4 = 2 \cdot 2 = 4$ **(D)**

Zad 2. $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 625$ czyli $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 25^2$ okrąg o promieniu 25
$(x-12)^2 + (y-5)^2 = r^2$ drugi okrąg. Aby były styczne (zewnętrznie lub wewnętrznie) to odległość między środkami musi być sumą lub różnicą promieni:
$A = (3;\ -7)$ $B = (12;\ 5)$ $\overrightarrow{AB} = [12-3;\ \ 5-(-7)] = [9;\ \ 12]$
$|AB| = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ $25 - 15 = 10$ **(C)**

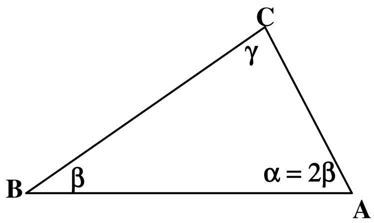
Zad 3. $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2} = \left|1-\sqrt{2}\right| + \left|2-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2} - 1 + 2 - \sqrt{2} = 1$ **(A)**

Zad 4. Trzeba sobie uświadomić że na wynik ma tu najistotniejszy wpływ współczynnik przy x gdyby go nie było czyli by wynosił 1 czyli by było $|x + a| < 2$ to liczb spełniających taką nierówność byłoby 3 $\{a-1;\ \ a;\ \ a+1\}$ oczywiście liczba ***a*** nie ma wpływu na odpowiedź a tylko przesuwa liczby spełniające nierówność w lewo bądź w prawo. Współczynniki przy x będące ułamkiem właściwym powodują że liczb spełniających nierówność jest więcej (ułożone są gęściej) Tak więc odpowiedzią może być tylko
$\left|\frac{4}{3}x + 5\right| < 2$ co daje nam koniunkcję nierówności $\frac{4}{3}x + 5 < 2$ $\wedge$ $\frac{4}{3}x + 5 > -2$
$\frac{4}{3}x < -3$ $\wedge$ $\frac{4}{3}x > -7$ i ostatecznie $\frac{4}{3}x < -2\frac{1}{4}$ $\wedge$ $x > -5\frac{1}{4}$
co daje ostatecznie odpowiedź $\{-5;\ \ -4;\ \ -3\}$ **(B)**

Zadania otwarte

Zad 5. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ $A = \left(6;\ \ \frac{36}{5}\right)$
$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$
współczynnik kierunkowy stycznej w danym punkcie to wartość pochodnej w tym punkcie
$f'(6) = \frac{6^2 - 2 \cdot 6}{(6-1)^2} = \frac{36-12}{5^2} = \frac{24}{25} = 0{,}96$
Odpowiedź: $\boxed{0}\boxed{9}\boxed{6}$

Zad 6. $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$
wprowadzając oznaczenia $|BC| = a$ $|AC| = b$ $|AB| = c$
mamy do udowodnienia: $a^2 - b^2 = c \cdot b$



Z twierdzenie sinusów mamy:
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ czyli $\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$ $\Rightarrow$ $\frac{a}{2\sin\beta\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$
$a \cdot \sin\beta = b \cdot 2\sin\beta\cos\beta\ |: \sin\beta$ $a = 2b\cos\beta$
$\cos\beta = \frac{a}{2b}$
Z twierdzenia kosinusów mamy też taką zależność
$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$ gdzie $\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (2\beta + \beta) = 180° - 3\beta$
$\frac{c}{\sin(180° - 3\beta)} = \frac{b}{\sin\beta}$ czyli $\frac{c}{\sin 3\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$ gdyż wiemy że $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
$c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin 3\beta$ teraz stosując wzór na $\sin(\alpha + \beta) = \sin(2\beta + \beta)$ mamy:
$c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin(2\beta + \beta)$
$c \cdot \sin\beta = b \cdot (\sin 2\beta \cdot \cos\beta + \cos 2\beta \cdot \sin\beta)$ teraz stosując wzory na $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\alpha$ mamy:
$c \cdot \sin\beta = b \cdot [2\sin\beta \cdot \cos\beta \cdot \cos\beta + (2\cos^2\beta - 1) \cdot \sin\beta]$
$c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\beta\,[2 \cdot \cos^2\beta + 2\cos^2\beta - 1]$
$c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\beta\,[4 \cdot \cos^2\beta - 1] |: \sin\beta$
$c = b(4 \cdot \cos^2\beta - 1)$ teraz korzystając z faktu że mamy $\cos\beta = \frac{a}{2b}$ czyli$\cos^2\beta = \frac{a^2}{4b^2}$

$c = b\left(4 \cdot \frac{a^2}{4b^2} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad c = b\frac{a^2}{b^2} - b \quad \Rightarrow \quad c = \frac{a^2}{b} - b| \cdot b$

$b \cdot c = a^2 - b^2$

co należało wykazać

Zad 7. $\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \frac{1}{4} \qquad \alpha \in \left(0; \ \frac{\pi}{2}\right)$

Stosując wzoru na sinus różnicy kątów i kosinus sumy kątów mamy:

$\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) = \left(\sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\alpha - \cos\frac{\pi}{12} \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\alpha - \sin\frac{\pi}{12} \cdot \sin\alpha\right) =$

$= \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\alpha - \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{12} \cdot \sin\alpha - \cos\frac{\pi}{12} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\alpha + \cos\frac{\pi}{12} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{12} \cdot \sin\alpha =$

$= \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha - \cos^2\frac{\pi}{12} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\frac{\pi}{12} \cdot \sin^2\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{12} =$

(Teraz z pierwszego i ostatniego wyrazu można wyłączyć przed nawias $\sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12}$ a ze środkowych $\cos\alpha \cdot \sin\alpha$)

$= \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - \cos\alpha \cdot \sin\alpha\left(\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot 1 - \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot 1 =$

$= \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12} - \cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

Mamy więc teraz do udowodnienia nierówność:

$\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 2\alpha < \frac{1}{4} \qquad \alpha \in \left(0; \ \frac{\pi}{2}\right)$ czyli $2\alpha \in (0; \ \pi)$ Jest to nierówność dość oczywista gdyż:

$\sin\alpha$ gdy $\alpha \in (0; \ \pi)$ ma wartość dodatnią więc $\frac{1}{2}\sin 2\alpha > 0$ dla $2\alpha \in (0; \ \pi)$

Mamy więc $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin 2\alpha < \frac{1}{4}$

Zad 8. $x^8 + x^2 = 2(x^4 + x - 1)$

$x^8 + x^2 = 2x^4 + 2x - 2$

$x^8 + x^2 - 2x^4 - 2x + 2 = 0$

$x^8 - 2x^4 + 1 + x^2 - 2x + 1 = 0$ teraz stosując wzór $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ w drugą stronę, mamy:

$(x^4 - 1)^2 + (x - 1)^2 = 0$ tu do I różnicy stosujemy $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$[(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)]^2 + (x - 1)^2 = 0$ i jeszcze raz $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$[(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)]^2 + (x - 1)^2 = 0$

$(x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x^2 + 1)^2 + (x - 1)^2 = 0$ teraz wyłączamy $(x-1)^2$ przed nawias

$(x - 1)^2[(x + 1)^2 \cdot (x^2 + 1)^2 + 1] = 0$ mamy iloczyn czyli:

$(x - 1)^2 = 0 \qquad \vee \qquad (x + 1)^2 \cdot (x^2 + 1)^2 + 1 = 0$

Dla $(x - 1)^2 = 0$ mamy odpowiedź $x = 1$ o czym pisze w zadaniu

Dla $(x + 1)^2 \cdot (x^2 + 1)^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązania gdyż po lewej stronie mamy iloczyn liczb nieujemnych powiększony o 1 więc nie może się równać 0

Odpowiedź: Tak więc zostało wykazane że jedynym pierwiastkiem równania jest $x = 1$

Zad 9. Mamy do dyspozycji cyfry: $\{0; \ 1; \ 3; \ 5; \ 7; \ 9\}$ a liczba ma być 8 – cyfrowa.

na pierwszym miejscu takiej liczby nie może być 0 więc mamy 5 innych cyfr a następnych dowolna każda.

Wszystkich takich liczb więc będzie: $\bar{\bar{\Omega}} = 5 \cdot 6^7$

Szukamy teraz ile może być liczb gdzie suma cyfr wynosi 3. Są tylko 2 takie sytuacje:

I) trójka z zerami – 3 musi być na początku a zera na pozostałych Liczba: 30000000 - 1 możliwość.

II) Liczba złożona z jedynek i zer (3 jedynki i 5 zer).

Jedynka musi być na początku a na pozostałych 7 miejscach 2 jedynki i 5 zer losowo wymieszane.

Mamy tu kombinację $\binom{7}{2} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$

$\bar{\bar{A}} = 1 + 21 = 22 \qquad P(A) = \frac{22}{5 \cdot 6^7} = \frac{22}{5 \cdot 6 \cdot 6^6} = \frac{11}{15 \cdot 6^6} = \frac{11}{15 \cdot 46656} = \frac{11}{699840}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo że będzie to liczba której suma cyfr wynosi 3 wynosi: $\frac{11}{699840}$

Zad 10. $\{a; \ aq; \ aq^2\}$ - ciąg geometryczny; $\{a; \ aq; \ aq^2 - 4\}$ - ciąg arytmetyczny

mamy więc: $aq - a = aq^2 - 4 - aq$

$aq + aq - a - aq^2 + 4 = 0$

$2aq - a - aq^2 + 4 = 0| \cdot (-1)$

$aq^2 - 2aq + a - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad aq^2 - 2aq + a = 4 \quad \Rightarrow \quad a(q^2 - 2q + 1) = 4$

$a \cdot (q - 1)^2 = 4| : (q - 1)^2$

$a = \frac{4}{(q-1)^2}$

teraz uwzględniając dodatkowe założenia jakie są w zadaniu, że ***a*** i ***q*** są całkowite i nieparzyste a ciąg rosnący dochodzimy do wniosku że: aby ***a*** było całkowite to $(q-1)^2$ musi być dzielnikiem 4, czyli

$(q-1)^2 = 1 \quad \vee \quad (q-1)^2 = 4$

Dla $(q-1)^2 = 1$ mamy $q = 2$; $\quad a = \frac{4}{1} = 4$; $\quad aq = 2 \cdot 4 = 8$

4 i 8 to liczby parzyste niezgodne z założeniem

Dla $(q-1)^2 = 4$ mamy $q = 3$; $\quad a = \frac{4}{4} = 1$; $\quad aq = 1 \cdot 3 = 3$

Ciąg musi być rosnący więc inne rozwiązania nie spełniają założeń np. $q = -1$

Odpowiedź: Drugi wyraz ciągu $aq = 3$.

Zad 11. $\quad x^2 + y^2 = 2^{11-n} \quad\quad P_k = O_{2k-1} - O_{2k}$

zgodnie ze wzorem na okrąg $x^2 + y^2 = r^2$ mamy ${r_1}^2 = 2^{11-1} = 2^{10}$; ${r_2}^2 = 2^{11-2} = 2^9$; ${r_3}^2 = 2^8$; ${r_4}^2 = 2^7 \cdots$ Mamy więc ciąg pierścieni kołowych gdzie:

$a_1 = P_1 = O_{2\cdot1-1} - O_{2\cdot1} = O_1 - O_2 = \pi 2^{10} - \pi 2^9 = \pi \cdot 2^9(2-1) = \pi \cdot 2^9 = 512\pi$

$a_2 = P_2 = O_{2\cdot2-1} - O_{2\cdot2} = O_3 - O_4 = \pi 2^8 - \pi 2^7 = \pi \cdot 2^7(2-1) = \pi \cdot 2^7 = 128\pi$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{128\pi}{512\pi} = \frac{1}{4}$

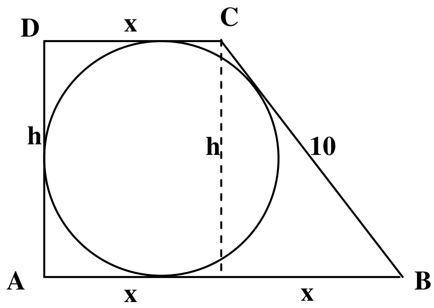
Rysując cała sytuację łatwo zauważyć że kolejne okręgi mają promień $r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n$

Mamy do policzenia sumę pól pierścieni będących co drugim pierścieniem w całym ciągu. Inaczej mówiąc okrąg zewnętrzny (wewnętrzny) kolejnego pierścienia to co drugi okrąg ciągu okręgów $q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Ciąg pierścieni jest więc ciągiem zbieżnym i jego suma wynosi:

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{512\pi}{1-\frac{1}{4}} = \frac{512\pi}{\frac{3}{4}} = 512\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{2048\pi}{3}$

Odpowiedź: Suma pól wszystkich tych pierścieni wynosi $\frac{2048\pi}{3}$.



Zad 12. W trapez jest wpisany okrąg więc $h + 10 = x + 2x$

$h + 10 = 3x \quad\quad h = 3x - 10$ i mamy trójkąt prostokątny BCD co daje z twierdzenia Pitagorasa $h^2 + x^2 = 10^2$ czyli

$(3x - 10)^2 + x^2 = 100$

$9x^2 - 60x + 100 + x^2 = 100$

$10x^2 - 60x = 0$

$x(10x - 60) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 10x - 60 = 0 | :10$

$x = 0$ - niezgodne z warunkami zadania

$x - 6 = 0 \quad\quad x = 6 \quad\quad h = 3 \cdot 6 - 10 = 18 - 10 = 8$

Mamy więc: $AB = 2x = 2 \cdot 6 = 12$; $\quad CD = x = 6$; $\quad h = 8$

$P = \frac{12+6}{2} \cdot 8 = 18 \cdot 4 = 72$

Odpowiedź: Pole trapezu wynosi 72

Zad 13. Okrąg przechodzi przez punkty: $P = (0;\ 10)$; $Q = (8;\ 6)$; $R = (9;\ 13)$ i jest wpisany w trójkąt prostokątny o wierzchołkach A; B; C gdzie A i B leżą na osi OY

Z treści zadania wynika że jedną ze stycznych do okręgu jest oś OY czyli prosta o równaniu $x = 0$ punktem styczności jest $P = (0;\ 10)$ a więc promień jako prostopadły do stycznej leży na prostej $y = 10$ więc środek okręgu ma współrzędne $(a;\ 10)$.

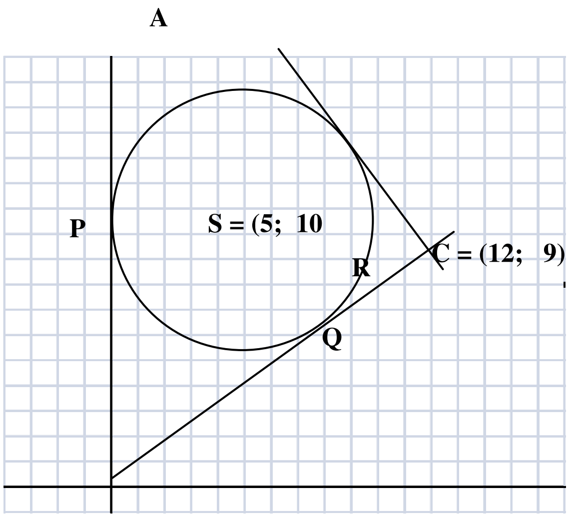
Teraz wstawiając do równania okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ współrzędne środka $(a;\ 10)$ oraz współrzędne punktów leżących na okręgu otrzymujemy:

$(0-a)^2 + (10-10)^2 = r^2$ dla $P = (0;\ 10)$

$(8-a)^2 + (6-10)^2 = r^2$ dla $Q = (8;\ 6)$ i teraz porównując te równania mamy:

$a^2 + 0^2 = (8-a)^2 + 4^2$

$a^2 = 64 - 16a + a^2 + 16 \quad\quad 16a = 80 | :16 \quad\quad a = 5$



mamy więc współrzędne środka $S = (5;\ \ 10)$

Policzymy teraz współrzędne punktu C. skorzystamy z faktu że $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{QC}$

czworokąt QCRS jest kwadratem z uwagi że $|SR| = |SQ| = r$ oraz przynajmniej 3 kąty maja po 90°

$\overrightarrow{SR} = [9 - 5;\ \ 13 - 10] = [4;\ \ 3]$

$\overrightarrow{QC} = [x - 8;\ \ y - 6] = [4;\ \ 3] \qquad \Longrightarrow \qquad x - 8 = 4 \qquad\qquad y - 6 = 3$

$x = 12 \qquad\qquad y = 9 \qquad\qquad C = (12;\ \ 9)$

Teraz pozostało obliczyć równania prostych AC i BC

Prosta BC przechodzi przez punkty $Q = (8;\ \ 6)$; $C = (12;\ \ 9)$

$a = \frac{9-6}{12-8} = \frac{3}{4} \qquad\qquad y = \frac{3}{4}x + b$ wstawmy punkt $Q = (8;\ \ 6) \qquad\qquad 6 = \frac{3}{4} \cdot 8 + b$

$6 = 6 + b \qquad\qquad b = 0$ Prosta BC to $y = \frac{3}{4}x$

jeżeli $b = 0$ to punkt $B = (0;\ \ 0)$

Prosta AC przechodzi przez punkty $R = (9;\ \ 13)$; $C = (12;\ \ 9)$

$a = \frac{9-13}{12-9} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3} \qquad\qquad y = -\frac{4}{3}x + b$ wstawmy punkt $R = (9;\ \ 13) \qquad\qquad 13 = -\frac{4}{3} \cdot 9 + b$

$13 = -12 + b \qquad\qquad b = 25$ Prosta AC to $y = -\frac{4}{3}x + 25$

jeżeli $b = 25$ to punkt $A = (0;\ \ 25)$

Odpowiedź: Szukane wierzchołki trójkąta to $A = (0;\ \ 25)$; $B = (0;\ \ 0)$; $C = (12;\ \ 9)$.

Zad 14. $x^2 - 3mx + (m+1)(2m-1) = 0$ istnieją x_1; x_2; $x_1 \cdot x_2 \neq 0$; $0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$

I) Pierwiastki istnieją czyli: $\Delta > 0 \qquad\qquad (-3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+1)(2m-1) > 0$

$9m^2 - 4(2m^2 - m + 2m - 1) > 0$

$9m^2 - 4(2m^2 + m - 1) > 0$

$9m^2 - 8m^2 - 4m + 4 > 0$

$m^2 - 4m + 4 > 0$

$\Delta_m = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

$m_1 = m_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \qquad\qquad m \in (-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$

II) Pierwiastki spełniają warunek $0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$

Przekształcimy wyrażenie $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 \cdot x_2} + \frac{x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$ co zgodnie z wzorami Viete'a daje

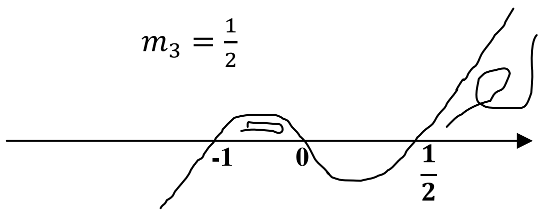
$\frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = -\frac{b}{c} = \frac{3m}{(m+1)(2m-1)}$

Teraz warunek $0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$ zapiszemy jako $0 < \frac{3m}{(m+1)(2m-1)} \leq \frac{2}{3}$ co daje nam 2 warunki

a) $0 < \frac{3m}{(m+1)(2m-1)}$ czyli $\frac{3m}{(m+1)(2m-1)} > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 3m(m+1)(2m-1) > 0$

pierwiastkami tego wielomianu są $m_1 = 0$; $\qquad m_2 = -1$; $\qquad m_3 = \frac{1}{2}$

$m \in (-1;\ \ 0) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)$



b) $\frac{3m}{(m+1)(2m-1)} \leq \frac{2}{3}$ czyli $\frac{9m}{(m+1)(2m-1)} \leq 2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{9m}{(m+1)(2m-1)} - 2 \leq 0$

$\frac{9m}{(m+1)(2m-1)} - \frac{2(m+1)(2m-1)}{(m+1)(2m-1)} \leq 0$

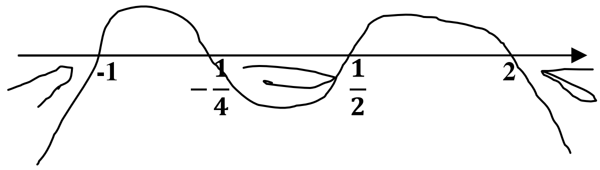
$\frac{9m-2(2m^2-m+2m-1)}{(m+1)(2m-1)} \leq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{9m-4m^2-2m+2}{(m+1)(2m-1)} \leq 0$

$\frac{-4m^2+7m+2}{(m+1)(2m-1)} \leq 0 \qquad (-4m^2+7m+2)(m+1)(2m-1) \leq 0 \qquad m \neq -1; \quad m \neq \frac{1}{2}$

Z całego wielomianu $(-4m^2+7m+2)(m+1)(2m-1)$ brakuje nam pierwiastków w $-4m^2+7m+2$

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2 = 49 + 32 = 81 \qquad \sqrt{81} = 9$

$m_1 = \frac{-7-9}{2\cdot(-4)} = \frac{-16}{-8} = 2 \qquad m_2 = \frac{-7+9}{2\cdot(-4)} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$ oraz mamy $m_3 = -1; \qquad m_4 = \frac{1}{2}$



$m \in (-\infty;\ -1) \cup \langle -\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}) \cup \langle 2;\ +\infty)$

III) Jest jeszcze warunek $x_1 \cdot x_2 \neq 0$

Warunek ten już praktycznie został spełniony ale należy to pokazać.

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{(m+1)(2m-1)}{1} = (m+1)(2m-1) \neq 0$ co nam daje że $m \neq -1; \quad m \neq \frac{1}{2}$

Teraz wystarczy wyznaczyć część wspólną rozwiązań dla ***m***

$\left[(-1;\ 0) \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right)\right] \cap \left[(-\infty;\ -1) \cup \langle -\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right) \cup \langle 2;\ +\infty)\Big] \cap [(-\infty;\ 2) \cup (2;\ +\infty)] = \langle -\frac{1}{4};\ 0) \cup (2;\ +\infty)$

Odpowiedź: Równanie spełnia warunki zadania dla: $m \in \langle -\frac{1}{4};\ 0) \cup (2;\ +\infty)$.

Zad 15. patrząc na konstrukcję prostopadłościanu widać że są 3 długości listewek:

1) 4 listewki o długości $6 - x$; 4 listewki o długości $6 - 2x$; 4 listewki o długości $10 - 2x - x = 10 - 3x$

Policzmy objętość całego drewna: $4 \cdot [x \cdot x \cdot (6-x)] + 4 \cdot [x \cdot x \cdot (6-2x)] + 4 \cdot [x \cdot x \cdot (10-3x)] =$

$= 4[x^2(6-x)] + 4 \cdot [x^2 \cdot (6-2x)] + 4 \cdot [x^2(10-3x)] = 4(6x^2 - x^3) + 4(6x^2 - 2x^3) + 4(10x^2 - 3x^3) =$

$24x^2 - 4x^3 + 24x^2 - 8x^3 + 40x^2 - 12x^3 = 88x^2 - 24x^3$

$V(x) = 88x^2 - 24x^3$ - otrzymaliśmy funkcję objętości drewna jednej zmiennej ***x***

Aby wyznaczyć dziedzinę tej funkcji trzeba przyjąc jako oczywiste że każda krawędź jest większa od 0, jak również krawędzie $6 - x; \quad 6 - 2x; \quad 10 - x$ muszą być większe od x aby graniastosłup istniał.

Mamy więc $x > 0; \quad 6 - x > x; \quad 6 - 2x > 0; \quad 10 - 3x > x$ i rozwiązując każdą nierówność

mamy: $\quad x > 0; \quad 2x < 6; \quad x < 3; \quad 4x < 10$

$x > 0; \quad x < 3; \quad x < 2{,}5$

co nam daje że: $D = (0;\ \ 2{,}5)$

$V'(x) = 2 \cdot 88x - 3 \cdot 24x^2 = 176x - 72x^2$

Szukamy ekstremum

$176x - 72x^2 = 0 \qquad 8x(22 - 9x) = 0$

$8x = 0 \quad \vee \quad 22 - 9x = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad 9x = 22 {:} 9 \qquad x = 2\frac{4}{9}$

Dla $x = 0$ nie ma rozwiązania bo $0 \notin D$

Dla $x = 2\frac{4}{9}$ mamy maksimum bo pochodna mająca wzór $V'(x) = 176x - 72x^2$ jako funkcja kwadratowa z gałęziami do dołu i wierzchołkiem $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{176}{-144} = 1\frac{2}{9}$ ma po lewej stronie miejsca zerowego $x = 2\frac{4}{9}$ wartości dodatnie a po prawej ujemne.

$V\left(2\frac{4}{9}\right) = 88 \cdot \left(\frac{22}{9}\right)^2 - 24 \cdot \left(\frac{22}{9}\right)^3 = 88 \cdot \frac{484}{81} - 24 \cdot \frac{10648}{729} = \frac{42592}{81} - \frac{255552}{729} = \frac{383328-255552}{729} = \frac{127776}{729} =$

$= 175\frac{201}{729}$

Odpowiedź: wzór na objętość drewna zurzytego na zrobienie tego modelu ma postać $V(x) = 88x^2 - 24x^3$ z dziedziną $D = (0;\ \ 2{,}5)$ a maksymalna objętość jest dla $x = 2\frac{4}{9}$ i wynosi $\frac{127776}{729} = 175\frac{201}{729}$.