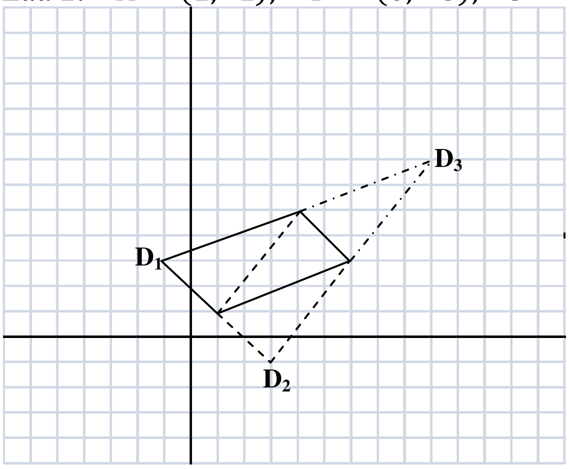
## *Czerwiec 2019 rok (poziom rozszerzony)(nowa matura)*
## *Zadania zamknięte*

***Zad 1.*** $(4-m^2)x = m^2 - 3m + 2$
łatwo zauważyć ze dla $m = 2$ mamy:$0x = 0$ czyli dla każdego $\boldsymbol{x}$ mamy: $0 = 0$ **(C)**

***Zad 2.*** $A = (1;\ 1);\quad B = (6;\ 3);\quad C = (4;\ 5)$




Z rysunku widać że da się zrobić to na 3 sposoby **(C)**

***Zad 3.*** $15x^5 - 133x^4 + 383x^3 - 499x^2 + 146x + 120$
Zgodnie z twierdzeniem Bezouta pierwiastki wielomianu muszą spełniać warunek $a = \frac{p}{q}$
gdzie p – dzielniki wyrazu wolnego q – dzielniki przy najwyższej potędze. Z podanych przykładów dzielnikiem 15 jest tylko 5. Natomiast dzielnikiem 120 jest 6 a nie jest 9. Więc tylko $\frac{6}{5}$ spełnia twierdzenie **(A)**

***Zad 4.*** $a_1 = \frac{3}{5}$ $\quad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$ czyli mamy $a_1 = \frac{3}{5};\quad q = \frac{2}{3}$
$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} : \frac{1}{3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{1} = \frac{9}{5}$ **(D)**

## *Zadania otwarte*

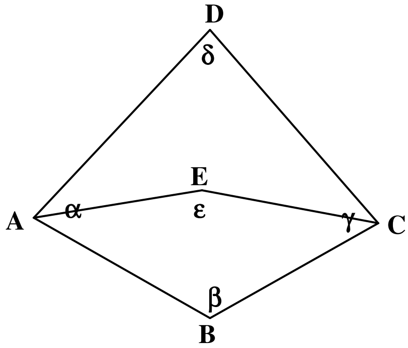
***Zad 5.*** Mamy 16 kul 10 białych i 6 czarnych
Losujemy 2 razy po 1 kuli bez zwracania $\overline{\overline{\Omega}} = 16 \cdot 15$
Wylosowane kule mają być białe $\overline{\overline{A}} = 10 \cdot 9;$ $\quad P(A) = \frac{10\cdot 9}{16\cdot 15} = \frac{5\cdot 3}{8\cdot 5} = \frac{3}{8} = 0{,}375$
Odpowiedź: $\boxed{3}\boxed{7}\boxed{5}$

***Zad 6.*** Liczby siedmiocyfrowe iloczyn cyfr 28
Szukamy kombinacji kiedy może być taki wynik.
Rozkładając 28 na czynniki pierwsze mamy: $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$ czyli ta liczba siedmiocyfrowa może zawierać:
I) dwie 2; 7 i 4 jedynki
II) jedną 4, 7 i 5 jedynek
(ważne że liczba nie zawiera zer bo iloczyn byłby zerem)
I) $\binom{7}{2} \cdot 5 \cdot 1 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} \cdot 5 \cdot 1 = \frac{6\cdot 7}{2} \cdot 5 = 21 \cdot 5 = 105$ Na początek obliczam na ile sposobów można wstawić dwie dwójki w tą 7 cyfrową liczbę $\binom{7}{2}$ potem dopisuję siódemkę na 5 sposobów i jest tylko 1 sposób na dopisanie jedynek.
II) $7 \cdot 6 \cdot 1 = 42$ Aby wpisać czwórkę mam 7 miejsc do dyspozycji potem wpisuje siódemkę i mam 6 wolnych miejsc a resztę uzupełniam jedynkami i na to jest jeden sposób.
Ostatecznie wszystkich możliwości jest $105 + 42 = 147$.
Odpowiedź: Wszystkich liczb 7-dmio cyfrowych w których iloczyn cyfr wynosi 28 jest 147.

***Zad 7.*** $f(x) = \frac{25x^2-9}{x^2+2}$ Obliczyć $f'(10)$
Obliczamy pochodną funkcji:

$f'(x) = \frac{50x(x^2+2)-2x(25x^2-9)}{(x^2+2)^2} = \frac{50x^3+100x-50x^3+18x}{(x^2+2)^2} = \frac{118x}{(x^2+2)^2}$

$f'(10) = \frac{118\cdot 10}{(10^2+2)^2} = \frac{1180}{102^2} = \frac{1180}{10404} = \frac{295}{2601}$




***Zad 8.*** Mamy wykazać że $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ADC| + 2\cdot|\sphericalangle AEC| = 360°$

Wprowadzamy oznaczenia: $\sphericalangle DAB = \alpha;\quad \sphericalangle ABC = \beta$

$\sphericalangle BCD = \gamma;\quad \sphericalangle CDA = \delta;\qquad \sphericalangle AEC = \varepsilon$

Z sumy kątów czworokąta ABCD mamy: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ :

tak samo w czworokącie ABCE mamy: $\frac{1}{2}\alpha + \beta + \frac{1}{2}\gamma + \varepsilon = 360°$

Mnożąc drugie równanie przez 2 mamy: $\alpha + 2\beta + \gamma + 2\varepsilon = 720°$

Teraz odejmując od równania $\alpha + 2\beta + \gamma + 2\varepsilon = 720°$ równanie $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ otrzymujemy:

$\alpha + 2\beta + \gamma + 2\varepsilon - \alpha - \beta - \gamma - \delta = 720° - 360°$ czyli

$\beta + 2\varepsilon - \delta = 360°$ czyli $\beta - \delta + 2\varepsilon = 360°$. Mamy więc $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ADC| + 2\cdot|\sphericalangle AEC| = 360°$

***co należało wykazać***

***Zad 9.*** $n^5 - 3n^4 - n + 19$ dzieli się przez 16 dla ***n*** – nieparzystego.

$n^5 - 3n^4 - n + 19 = n^4(n-3) - n + 3 + 16 = n^4(n-3) - 1(n-3) + 16 = (n^4-1)(n-3) + 16 =$

$= (n^2-1)(n^2+1)(n-3) + 16 = (n-1)(n+1)(n^2+1)(n-3) + 16 =$

$= (n-3)(n-1)(n+1)(n^2+1) + 16$

Mamy założenie że n nieparzyste to $n-3;\quad n-1;\quad n+1;\quad n^2+1$ są liczbami parzystymi. Mamy więc iloczyn 4 liczb parzystych $(n-3)(n-1)(n+1)(n^2+1)$ czyli jest on podzielny przez $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$. Ostatecznie mamy sumę 2 liczb podzielnych przez 16.

Odpowiedź: $n^5 - 3n^4 - n + 19$ jest podzielne przez 16 bo da się przedstawić jako suma dwóch liczb podzielnych przez 16.

***Zad 10.*** Suma kątów wewnętrznych wielokąta o ***n*** bokach to: $(n-2)\cdot 180°$ - bo wielokąt da się podzielić na $n-2$ trójkątów. Idąc dalej jeden kąt wielokąta ma miarę $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$

Tak więc zgodnie z założeniem zadania mamy: $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} + 2° = \frac{(n+2-2)\cdot 180°}{n+2}$ czyli

$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} + 2° = \frac{n\cdot 180°}{n+2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} + \frac{2°n}{n} = \frac{n\cdot 180°}{n+2}$

$\frac{180n-360+2n}{n} = \frac{180n}{n+2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{182n-360}{n} = \frac{180n}{n+2}$ co wymnażając na krzyż mamy:

$(182n-360)(n+2) = 180n^2$

$182n^2 + 364n - 360n - 720 = 180n^2$

$182n^2 - 180n^2 + 4n - 720 = 0$

$2n^2 + 4n - 720 = 0 |: 2$

$n^2 + 2n - 360 = 0 |: 2$

$\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot(-360) = 4 + 1440 = 1444 \qquad \sqrt{1444} = 38$

$n_1 = \frac{-2-38}{2} = \frac{-40}{2} = -20 \qquad n_2 = \frac{-2+38}{2} = \frac{36}{2} = 18$

$n_1 = -20$ niezgodne z założeniem (ilość boków jest liczbą dodatnią)

$n_2 = 18$ - wynik zgodny z założeniem zadania.

Odpowiedź: W osiemnastokącie wielkość kąta jest o 2° mniejsza niż w dwudziestokącie.

***Zad 11.*** Do rysunku ostrosłupa dorysowujemy wysokość trójkąta BCS – odcinek SG i trójkąta ADE – odcinek AF.

wysokości te przecinają się pod kątem prostym w punkcie F.

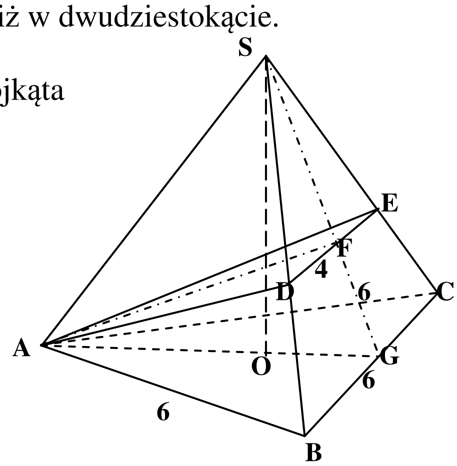
Wprowadzamy oznaczenia $FG = x;\quad SF = 2x;\quad GS = 3x$

Wynika to z faktu że trójkąty DES i BCS są podobne w skali $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Odcinek AG jako wysokość trójkąta równobocznego ma długość:

$|AG| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

oznaczmy jeszcze $|AF| = y;\quad |AS| = |BS| = z$



Trójkąt BGS jest prostokątny więc $z^2 = 3^2 + (3x)^2$ $\qquad$ $z^2 = 9 + 9x^2$

Trójkąt AGF też jest prostokątny z założenia postawionego w zadaniu, więc $\left(3\sqrt{3}\right)^2 = x^2 + y^2$

$9 \cdot 3 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad 27 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 27 - x^2$

Trójkąt AFS tak samo jest prostokątny więc $z^2 = y^2 + (2x)^2$ podstawiając teraz za $\boldsymbol{y}$ i za $z$ wyliczone wartości mamy: $9 + 9x^2 = 27 - x^2 + 4x^2$

$9x^2 + x^2 - 4x^2 = 27 - 9 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 = 18 | : 6 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 3$

$x = \sqrt{3} \qquad |GS| = 3x = 3\sqrt{3}$

Teraz korzystając z trójkąta GSO wyliczymy długość wysokości ostrosłupa $|SO| = H$

Wiadomym jest że punkt O dzieli wysokość podstawy w stosunku 2 : 1 stąd $|GO| = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

Mamy więc z twierdzenia Pitagorasa $\sqrt{3}^2 + H^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad H^2 = 27 - 3 = 24$

$H = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{3 \cdot 6} = 6\sqrt{18} = 6\sqrt{9 \cdot 2} = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi $18\sqrt{2}$.

***Zad 12.*** $\quad 4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2 = 0$

I) Istnieją dwa pierwiastki czyli $\Delta > 0$

$\Delta = (2 - 4m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (m^2 - m - 2) = 4 - 16m + 16m^2 - 16m^2 + 16m + 32 = 36$

Tak więc $\Delta = 36$ niezależnie od $\boldsymbol{m}$, czyli dla każdego $m \in R$ istnieją 2 pierwiastki.

II) Pierwiastki mają być dodatnie. Aby pierwiastki były dodatnie musi ich suma jak też iloczyn być dodatni.

Spełnimy ten warunek za pomocą wzorów Viete'a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0; \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{4m-2}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad 4m - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 4m > 2 \quad \Rightarrow \quad m > \frac{1}{2}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{m^2-m-2}{4} > 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 - m - 2 > 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \qquad \sqrt{9} = 3$

$m_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad m_2 = \frac{1+3}{2} = 2$

$m \in (-\infty; \ -1) \cup (2; \ +\infty)$

Teraz biorąc cześć wspólną $m > \frac{1}{2} \quad \wedge \quad m \in (-\infty; \ -1) \cup (2; \ +\infty)$ mamy $m \in (2; \ +\infty)$

III) Pierwiastki spełniają warunek $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$

Korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ mamy $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ co nam daje

Mamy więc: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ teraz korzystając z wzorów Viete'a mamy

$x_1^2 + x_2^2 = \left(\frac{4m-2}{4}\right)^2 - 2\frac{m^2-m-2}{4} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{m^2-m-2}{2} = m^2 - m + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m + 1 =$

$= \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{5}{4}$ i ostatecznie mamy do rozwiązania nierówność

$\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m + \frac{5}{4} \leq \frac{17}{4} | \cdot 4$

$2m^2 - 2m + 5 \leq 17 \quad \Rightarrow \quad 2m^2 - 2m + 5 - 17 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 2m^2 - 2m - 12 \leq 0 | : 2$

$m^2 - m - 6 \leq 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \qquad \sqrt{25} = 5$

$m_1 = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad m_2 = \frac{1+5}{2} = 3$

$m \in \langle -2; \ 3 \rangle$ Teraz uwzględniając rozwiązania z I; II i III mamy

$(2; \ +\infty) \cap \langle -2; \ 3 \rangle = (2; \ 3 \rangle$

Odpowiedź: Warunki zadania są spełnione dla $m \in (2; \ 3 \rangle$

***Zad 13.*** Okrąg przechodzi przez punkty: $A = (-2; \ 6); \qquad 2x - y - 5 = 0; \qquad P = 90$

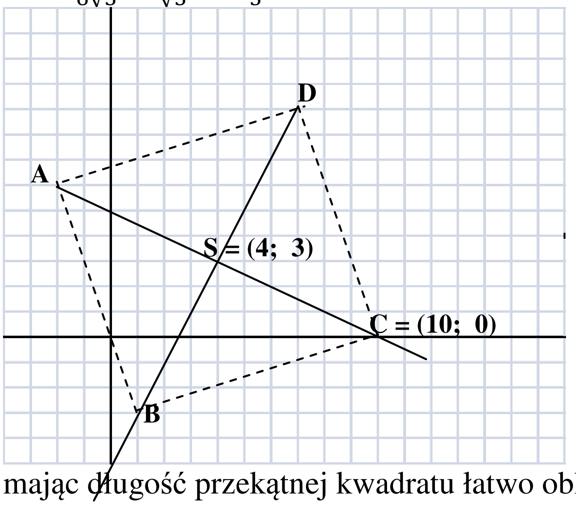
Zadanie można policzyć bardzo szybko

Obliczając odległość punktu A od danej prostej otrzymujemy długość połowy przekątnej AC:

d $= \frac{|2 \cdot (-2) - 1 \cdot 6 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-4-6-5|}{\sqrt{4+1}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$ Jest to połowa przekątnej AC więc cała wynosi $6\sqrt{5}$.

Korzystając teraz ze wzoru na pole rombu mamy: $90 = \frac{6\sqrt{5} \cdot p_2}{2} | \cdot 2 \qquad 180 = 6\sqrt{5} \cdot p_2$

$p_2 = \frac{180}{6\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} = \frac{30\sqrt{5}}{5} = 6\sqrt{5}$ Otrzymaliśmy że przekątne są równe więc romb jest kwadratem




mając długość przekątnej kwadratu łatwo obliczyć jego bok

$p = a\sqrt{2}$ $\quad a = \frac{p}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{5}\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{10}$

Odpowiedź: Długość boku wynosi $3\sqrt{10}$

***(Zadanie byłoby ciekawsze i dłuższe gdyby było polecenie aby policzyć współrzędne wierzchołków.)***

Na początek wypada obliczyć współrzędne środka. Mamy prostą BD $2x - y - 5 = 0$ czyli: $y = 2x - 5$

Prosta AC ma więc jako prostopadła do niej $a = -\frac{1}{2}$ $\quad 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

Prosta AC ma więc postać $y = -\frac{1}{2}x + b$ i przechodzi przez punkt $A = (-2;\ \ 6)$

$6 = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + b \quad \Rightarrow \quad 6 = 1 + b \quad \Rightarrow \quad b = 5$

Prosta AC to $y = -\frac{1}{2}x + 5$

Teraz rozwiążemy układ równań $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$ aby obliczyć współrzędne przecięcia się przekątnych.

$-\frac{1}{2}x + 5 = 2x - 5$

$-\frac{1}{2}x - 2x = -5 - 5 \quad \Rightarrow \quad -2\frac{1}{2}x = -10 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

$y = 2x - 5 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \cdot 4 - 5 \quad \Rightarrow \quad y = 8 - 5 = 3 \qquad S = (4;\ \ 3)$

***(Teraz podaję jeden ze sposobów na obliczenie współrzędnych wierzchołków)***

Można teraz napisać równanie okręgu o środku w punkcie $S = (4;\ \ 3)$ i promieniu $r = 3\sqrt{5}$ na którym będą leżeć wierzchołki kwadratu $(x-4)^2 + (y-3)^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2$ Mając układ równań: równanie okręgu i równanie prostej $y = 2x - 5$ wyznaczamy współrzędne wierzchołków B i D

$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-3)^2 = 9 \cdot 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-4)^2 + (2x-5-3)^2 = 45 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$

$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 32x + 64 = 45$

$5x^2 - 40x + 80 - 45 = 0 | : 5 \qquad x^2 - 8x + 7 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36 \qquad \sqrt{36} = 6$

$x_1 = \frac{8-6}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{8+6}{2} = \frac{14}{2} = 7$

Dla $x_1 = 1$ $y = 2x - 5 = 2 \cdot 1 - 5 = -3 \qquad B = (1;\ \ -3)$

Dla $x_1 = 7$ $y = 2x - 5 = 2 \cdot 7 - 5 = 9 \qquad D = (7;\ \ 9)$

Teraz współrzędne punktu $C = (x;\ \ y)$ można obliczyć z równości wektorów

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \qquad \overrightarrow{AB} = [1 - (-2);\ \ -3 - 6] = [3;\ \ -9]$

$\overrightarrow{DC} = [3;\ \ -9] = [x - 7;\ \ y - 9]$

$x - 7 = 3 \qquad x = 3 + 7 = 10 \qquad y - 9 = -9 \qquad y = -9 + 9 = 0$

$C = (10;\ \ 0)$

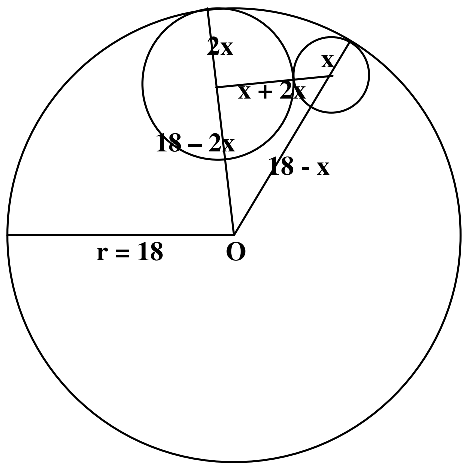
Odpowiedź: Szukane wierzchołki rombu to $B = (1;\ \ -3)$; $\quad C = (10;\ \ 0)$; $\quad D = (7;\ \ 9)$ .

***Zad 14.*** $4\sin 7x \cdot \cos 2x = 2\sin 9x - 1 \qquad x \in \langle 0;\ \ \pi \rangle$

Mamy wzór: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

gdy sobie podstawimy $\alpha = 9x$ $\beta = 5x$ to otrzymamy: $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{9x+5x}{2} = 7x$ $\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{9x-5x}{2} = 2x$
czyli mamy: $\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cos 2x$ czyli
$2\sin 7x \cos 2x = \sin 9x + \sin 5x \,|\cdot 2$
$4\sin 7x \cos 2x = 2(\sin 9x + \sin 5x)$ Wstawiając to wyliczenie do równania początkowego mamy:
$2(\sin 9x + \sin 5x) = 2\sin 9x - 1$
$2\sin 9x + 2\sin 5x = 2\sin 9x - 1$
$2\sin 9x - 2\sin 9x + 2\sin 5x = -1$
$2\sin 5x = -1 |: 2$
$\sin 5x = -\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 5x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \vee \quad 5x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$
$x = \frac{7}{30}\pi + \frac{2}{5}k\pi \quad \vee \quad x = \frac{11}{30}\pi + \frac{2}{5}k\pi$
Teraz aby udzielić ostatecznej odpowiedzi trzeba ustalić ile i jakie są rozwiązania dla $x \in \langle 0; \quad \pi \rangle$
Mamy: dla $k = 0$: $x_1 = \frac{7}{30}\pi$; $x_2 = \frac{11}{30}\pi$
dla $k = 1$: $x_3 = \frac{7}{30}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{19}{30}\pi$; $x_4 = \frac{11}{30}\pi + \frac{2}{5}\pi = \frac{23}{30}\pi$
dla $k = 2$: $x_5 = \frac{7}{30}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{7+24}{30}\pi = \frac{31}{30}\pi$; $\frac{31}{30}\pi \notin \langle 0; \quad \pi \rangle$
Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są: $\frac{7}{30}\pi$; $\frac{11}{30}\pi$; $\frac{19}{30}\pi$; $\frac{23}{30}\pi$ .

***Zad 15.*** Mamy obliczyć pole trójkąta o bokach $x + 2x = 3x$; $18 - x$; $18 - 2x$
gdzie $\boldsymbol{x}$ to długość promienia najmniejszego okręgu.




Mamy obliczyć pole tego trójkąta $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
$p = \frac{3x+18-x+18-2x}{2} = \frac{36}{2} = 18$ - połowa obwodu trójkąta
$P = \sqrt{18(18-3x)(18-18+x)(18-18+2x)} =$
$= \sqrt{18(18-3x)\cdot x \cdot 2x} = \sqrt{36x^2(18-3x)} = 6x\sqrt{18-3x}$
$P(x) = 6x\sqrt{18-3x}$ - pole trójkata jako funkcja zmiennej x.
Określmy dziedzinę tej funkcji.
1) Boki trójkąta muszą być większe od zera
$x > 0 \quad \wedge \quad 18 - 2x > 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in (0; \quad 9)$
2) Boki trójkąta muszą spełniac warunek trójkąta czyli:
$3x + 18 - 2x > 18 - x$ i $18 - x + 18 - 2x > 3x$
$x + 18 > 18 - x$ i $36 - 3x > 3x$
$2x > 0$ i $36 > 6x$
$x > 0$ i $x < 6$ $D = (0; \quad 6)$
Teraz trzeba policzyc pochodną funkcji $P(x) = 6x\sqrt{18-3x}$ ale uczeń szkoły średniej nie potrafi obliczyć pochodnej z pierwiastka więc wprowadźmy nową funkcję:
$f(x) = P(x)^2 = \left(6x\sqrt{18-3x}\right)^2 = 36x^2(18-3x) = 648x^2 - 108x^3 = 108(6x^2 - x^3)$
Extremum funkcji $f(x)$ jest w tym samym miejscu co $P(x)$.
$f(x) = 108(6x^2 - x^3)$
$f'(x) = 2\cdot 6x - 3x^2 = 12x - 3x^2$
$12x - 3x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x(4 - x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \vee \quad x = 4$
Dla $x = 0$ widzimy że $x \notin D$ (okręgi nie mogą być o zerowym promieniu)
Dla $x = 4$ mamy maksimum bo dla $x < 4$; $4 - x > 0$ natomiast dla $x > 4$; $4 - x < 0$
Dla $x = 4$ mamy trójkąt o bokach: $3x = 12$; $18 - 2x = 18 - 8 = 10$; $18 - x = 18 - 4 = 14$
Obliczmy pole trójkąta dla boków 10; 12; 14;
$P(x) = 6x\sqrt{18-3x} = P(4) = 6\cdot 4\sqrt{18 - 3\cdot 4} = 24\sqrt{18-12} = 24\sqrt{6}$
Odpowiedź: Trójkąt o największym polu ma boki długości 10; 12; 14; a jego pole wynosi $24\sqrt{6}$.