Matura próbna kwiecień 2020r (CKE)

Zadania zamknięte

Zad 1. $a = -2 \quad b = 3$

$a^b - b^a = (-2)^3 - 3^{(-2)} = -8 - \frac{1}{3^2} = -8 - \frac{1}{9} = -\frac{73}{9}$ **(C)**

Zad 2. $9^9 \cdot 81^2 = 9^9 \cdot (9^2)^2 = 9^9 \cdot 9^4 = 9^{9+4} = 9^{13}$ **(C)**

Zad 3. $\log_4 8 + 5\log_4 2 = \log_4 8 + \log_4 2^5 = \log_4 8 + \log_4 32 = \log_4 8 \cdot 32 = \log_4 256 =$
$= \log_4 4^4 = 4\log_4 4 = 4 \cdot 1 = 4$ **(B)**

Zad 4. Mamy koło o promieniu r oraz koło o promieniu $1{,}3r$ czyli większym o 30%
Koło mniejsze ma pole $P_1 = \pi r^2$. Pole większe ma pole $P_2 = \pi(1{,}3r)^2 = \pi \cdot 1{,}69r^2 =$
$= 1{,}69\pi r^2 = 1{,}69P_1$. Widzimy że pole większe jest większe od mniejszego o 69% **(D)**

Zad 5. $(2\sqrt{7} - 5)(2\sqrt{7} + 5) = (2\sqrt{7})^2 - 5^2 = 4 \cdot 7 - 25 = 28 - 25 = 3$ **(B)**

Zad 6. $11 \le 2x - 7 \le 15$. Odpowiedzią jest część wspólna rozwiązań nierówności:

$11 \le 2x - 7 \quad \wedge \quad 2x - 7 \le 15$

$-2x \le -7 - 11 \quad \wedge \quad 2x \le 15 + 7$

$-2x \le -18 |:(-2) \quad \wedge \quad 2x \le 22 |:2$

$x \ge 9 \quad \wedge \quad x \le 11$ **(D)**

Zad 7. Obwód prostokąta o bokach długości i jest równy 60:
$2(a + b) = 60$ takie I równanie jest w punkcie A i D
Jeden z boków tego prostokąta jest o 10 dłuższy od drugiego.
$a + 10 = b$ lub też $a - b = 10$ czyli II równanie jest dobre w punkcie A i C **(A)**

Zad 8. $\frac{x+1}{x+2} = 3 \quad dla: \ x \neq -2$ Rozwiązując to równanie mamy:

$\frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{1}$ czyli mnożąc na krzyż mamy: $1(x + 1) = 3(x + 2)$

$x + 1 = 3x + 6 \quad \Rightarrow \quad x - 3x = 6 - 1$

$-2x = 5 |:(-2) \quad \Rightarrow \quad x = -2{,}5$ czyli $x \epsilon \langle -5; \ -2)$ **(D)**

Zad 9. Części są w stosunku $3:4:5$ czyli układamy równanie: $3x + 4x + 5x = 100$

$12x = 100 |:12 \quad \Rightarrow \quad x = 8\frac{1}{3}$. więc najdłuższy kawałek ma $5x = 5 \cdot 8\frac{1}{3} = 40\frac{5}{3} = 41\frac{2}{3}$ **(A)**

Zad 10. Z wykresu widzimy że punkt przecięcia z osią $OY = c$ jest ponad osią X czyli $c > 0$
wiemy też że $p = -\frac{b}{a}$ a na tym wykresie p leży po prawej stronie czyli $p > 0$
co daje że $b < 0$ **(A)**

Zad 11. $a_1 = 2; \quad a_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad r = a_2 - a_1 = 9 - 2 = 7$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 2 + (n - 1) \cdot 7 = 79$

$2 + 7n - 7 = 79 \quad \Rightarrow \quad 7n = 79 + 7 - 2$

$7n = 84 |:7$

$n = 12$ **(C)**

Zad 12. $(81; \quad 3x; \quad 4)$ ciąg geometryczny. Czyli mamy:

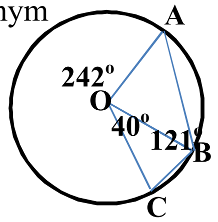
$\frac{3x}{81} = \frac{4}{3x} \quad \Rightarrow \quad 3x \cdot 3x = 81 \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 = 324 |:9$

$x^2 = 36 \quad x = \sqrt{36} = 6$ **(B)**

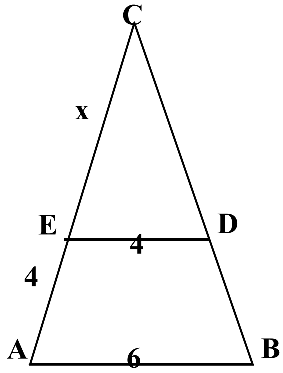
Zad 13. $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ to z jedynki trygonometrycznej mamy: $\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{4 \cdot 6}{49} = 1 - \frac{24}{49} = \frac{25}{49} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$ **(B)**

Zad 14. Jeżeli $\sphericalangle ABC = 121°$ i jest kątem wpisanym
to odpowiadający mu kąt środkowy ma
$\sphericalangle AOC = 242°$ kąt wklęsły.
tak więc kąt wypukły
$\sphericalangle AOC = 360° - 242° = 118°$
i ostatecznie $\sphericalangle AOB = 118° - 40° = 78°$ **(D)**



Zad 15. Z faktu że $DE||AB$ trójkąty ABC i DEC są podobne



Mamy więc $\frac{CE}{ED} = \frac{AC}{AB}$ czyli $\frac{x}{4} = \frac{x+4}{6}$

$4(x+4) = 6x$

$4x + 16 = 6x$

$4x - 6x = -16 \qquad\qquad -2x = -16 | : (-2)$

$x = 8$

(C)

Zad 16. Pole powierzchni trójkąta równobocznego liczymy ze wzoru

$P = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

więc $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \,|\cdot 4 \qquad \Longrightarrow \qquad a^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} | : \sqrt{3}$

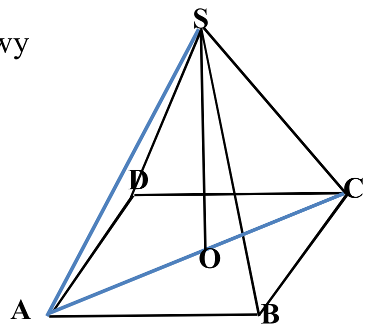
$a^2 = 24 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = 2\sqrt{6}$ **(C)**

Zad 17. $B = (-2;\ \ 4);\ \ C = (5;\ \ 1)$

$|BC| = \sqrt{\left(5-(-2)\right)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

$P = \sqrt{58}^2 = 58$ **(C)**

Zad 18. kąt nachylenia krawędzi bocznej AS do podstawy to $\sphericalangle SAO$

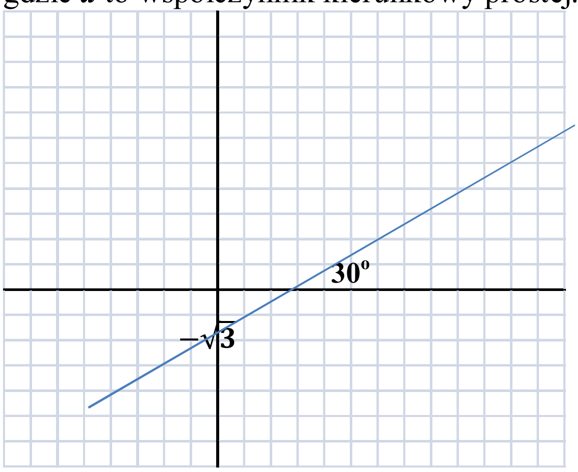


(A)

Zad 19. Graniastosłup ma 14 wierzchołków czyli po 7 przy podstawie górnej i dolnej.
Jest to więc graniastosłup z siedmiokątem w podstawie.
Krawędzi więc jest $3 \cdot 7 = 21$ **(B)**

Zad 20. Prosta prostopadła do osi OX ma wzór postaci $x = a$. Z uwagi na to że przechodzi przez punkt $(4;\ \ -4)$ to wzór jest $x = 4$ czyli $x - 4 = 0$ **(A)**

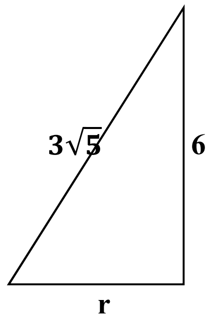
Zad 21. Równanie prostej ma postać $y = ax + b$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ czyli $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$
gdzie ***a*** to współczynnik kierunkowy prostej.



b - jest punktem przecięcia z osią OY czyli $b = -\sqrt{3}$

Prosta ta ma więc wzór $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ **(A)**

Zad 22. Aby policzyć objętość stożka trzeba mieć $h = 6$ oraz promień którego długość policzymy z Tw. Pitagorasa.



$r^2 + 6^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 9 \cdot 5 - 36$

$r^2 = 45 - 36 = 9 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{9} = 3$

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 6 = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 6 = 18\pi$ **(B)**

Zad 23. $\frac{x+2+4+6+8+10+12+14}{8} = 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+56}{8} = 9 | \cdot 8$

$x + 56 = 72 \quad \Rightarrow \quad x = 72 - 56 = 16$

Mamy więc zbiór w postaci uporządkowanej $\{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 14;\ 16\}$

Medianą będzie $\frac{8+10}{2} = 9$ **(B)**

Zad 24. Liczby naturalne czterocyfrowe mniejsze od 2017: $2016 - 999 = 1017$ **(D)**

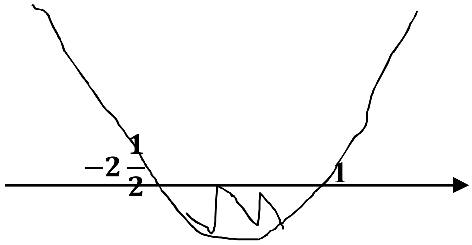
Zad 25. Mamy 6 kul białych i $\boldsymbol{x}$ czarnych czyli wszystkich kul jest $6 + x$

$\frac{6}{6+x} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 6 + x = 6 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 6 + x = 18 \quad \Rightarrow \quad x = 18 - 6$

$x = 12$ **(D)**

<u>Zadania otwarte</u>

Zad 26. $2x^2 + x - 6 \le 0$



$2x^2 + x - 6 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25 \qquad \sqrt{25} = 5$

$x_1 = \frac{-1-5}{2 \cdot 2} = \frac{-6}{4} = -2{,}5 \qquad x_2 = \frac{-1+5}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$

Pierwiastki:

$x_1 = -2{,}5 \qquad x_2 = 1$

Odp: $x \in \left(-2\frac{1}{2};\ \ 1\right)$

Zad 27. $(x^2 - 6)(3x + 2) = 0$

$x^2 - 6 = 0 \quad \vee \quad 3x + 2 = 0$

$\left(x - \sqrt{6}\right)\left(x + \sqrt{6}\right) = 0 \quad \vee \quad 3x = -2 | : 3$

$x - \sqrt{6} = 0 \quad \vee \quad x + \sqrt{6} = 0 \quad \vee \quad x = -\frac{2}{3}$

Odpowiedź: $x_1 = \sqrt{6} \quad \vee \quad x_2 = -\sqrt{6} \quad \vee \quad x_3 = -\frac{2}{3}$

Zad 28. $4x + \frac{1}{x} \ge 4$ Przekształćmy tą nierówność:

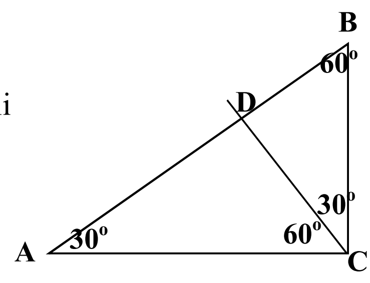
$4x + \frac{1}{x} - 4 \ge 0 | \cdot x$ (Nierówność ma być prawdziwa dla liczb dodatnich)

$4x^2 + 1 - 4x \ge 0$

$4x^2 - 4x + 1 \ge 0$

$(2x - 1)^2 \ge 0$ Otrzymaliśmy kwadrat pewnej liczby i jako kwadrat jest liczbą nieujemną co należało wykazać.

Zad 29. Mamy trójkąt prostokątny ABC o kątach ostrych 60º i 30º



Więc jeżeli przyjmiemy, że bok $|AB| = a$ to $\sin 30° = \frac{|BC|}{a}$ czyli

$\frac{1}{2} = \frac{|BC|}{a} \quad \Rightarrow \quad |BC| = \frac{1}{2}a$

$\cos 30° = \frac{|AC|}{a}$ czyli $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|AC|}{a} \quad \Rightarrow \quad |AC| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

jeżeli CD jest wysokością to wszystkie trójkąty:

ABC; ACD i CBD mają takie same kąt są prostokątne z takimi samymi kątami ostrymi.

Teraz w trójkącie ACD $\cos 30° = \frac{|AD|}{|AC|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|AD|}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot |AD| = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow$

$2 \cdot |AD| = \frac{3}{2}a | : 2 \quad \Rightarrow \quad |AD| = \frac{3}{4}a$

Teraz jeżeli $|AD| = \frac{3}{4}a$ to $|BD| = a - \frac{3}{4}a = \frac{1}{4}a$

Mamy więc $|AD| : |BD| = \frac{3}{4}a : \frac{1}{4}a = \frac{\frac{3}{4}a}{\frac{1}{4}a} = 3 : 1$ co należało wykazać.

Zad 30. Mamy zbiór $\{1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 10\}$

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych liczy 25 elementów $5 \cdot 5 = 25$ i można go wypisać.

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 1{,}1; & 1{,}2; & 1{,}4; & 1{,}5; & 1{,}10 \\ 2{,}1; & 2{,}2; & 2{,}4; & 2{,}5; & 2{,}10 \\ 4{,}1; & 4{,}2; & 4{,}4; & 4{,}5; & 4{,}10 \\ 5{,}1; & 5{,}2; & 5{,}4; & 5{,}5; & 5{,}10 \\ 10{,}1; & 10{,}2; & 10{,}4; & 10{,}5; & 10{,}10 \end{Bmatrix} \qquad \overline{\overline{\Omega}} = 25$$

mamy teraz wybrać te wyniki dla których dzielenie pierwszej liczby przez drugą daje w wyniku liczbę całkowitą.

$A = \{1{,}1;\ 2{,}1;\ 2{,}2;\ 4{,}1;\ 4{,}2;\ 4{,}4;\ 5{,}1;\ 5{,}5;\ 10{,}1;\ 10{,}2;\ 10{,}5;\ 10{,}10\} \qquad \overline{\overline{A}} = 12$

$P(A) = \frac{12}{25}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi $\frac{12}{25}$.

Zad 31. $a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = 100$ ciąg arytmetyczny.

$a_n = a_1 + (n-1)r$ wzór na n-ty wyraz ciągu. Mamy więc

$a_1 + 20r + a_1 + 23r + a_1 + 26r + a_1 + 29r = 100$

$4a_1 + 98r = 100$

Mamy obliczyć $a_{25} + a_{26} = a_1 + 24r + a_1 + 25r = 2a_1 + 49r$

Korzystając z obliczenia $4a_1 + 98r = 100$

po podzieleniu przez 2 mamy $2a_1 + 49r = 50$.

Zad 32. $f(x) = ax^2 + bx + c \qquad x_1 = -2 \qquad x_2 = 6 \qquad A = (1;\ -5)$

$f(x) = a(x+2)(x-6)$ postać iloczynowa tej funkcji. Wykres przechodzi przez $A = (1;\ -5)$ czyli mamy: $f(1) = -5$

$f(1) = a(1+2)(1-6) = -5 \quad \Rightarrow \quad a \cdot 3 \cdot (-5) = -5 \quad \Rightarrow \quad -15a = -5 |:(-15)$

$a = \frac{-5}{-15} = \frac{1}{3}$

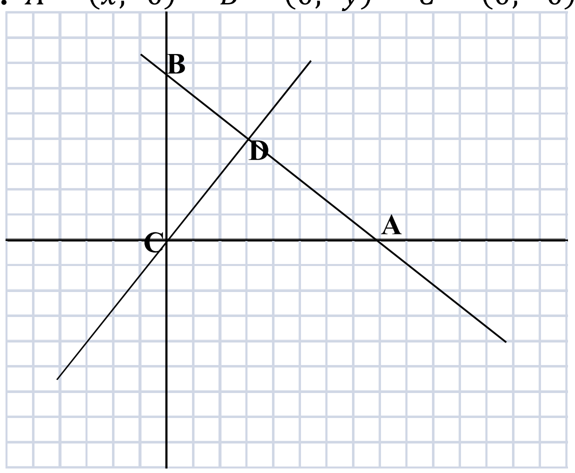
$f(x) = \frac{1}{3}(x+2)(x-6)$ Widzimy że gałęzie funkcji są skierowane do góry $a = \frac{1}{3}$

Najmniejszą wartością jest $q = f(p)$ Współrzędne p wierzchołka łatwo policzyć jako średnia arytmetyczna z miejsc zerowych $p = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$q = f(p) = \frac{1}{3}(2+2)(2-6) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (-4) = -\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3}$

Odpowiedź: Najmniejsza wartość funkcji $q = -\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3}$

Zad 33. $A = (x;\ 0) \quad B = (0;\ y) \quad C = (0;\ 0) \quad D = (3;\ 4)$



Łatwo policzyć współczynnik kierunkowy prostej CD $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$. Prosta CD zawiera wysokość trójkąta ABC więc jest prostopadła do prostej AB. Tak więc współczynnik kierunkowy prostej AB $a = -\frac{3}{4} \quad \left(-\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -1\right)$.

Prosta AB ma postać $y = -\frac{3}{4}x + b$ i przechodzi przez $D = (3;\ 4)$

$4 = -\frac{3}{4} \cdot 3 + b \qquad 4 = -\frac{9}{4} + b \qquad b = 4 + \frac{9}{4} = 4 + 2\frac{1}{4} = 6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ - równanie prostej AB

Punkt $B = (0;\ b) = \left(0;\ \frac{25}{4}\right)$ Współrzędne punktu A obliczymy po obliczeniu miejsca zerowego funkcji. Mamy więc:

$0 = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ $\qquad \frac{3}{4}x = \frac{25}{4}$

$3x = 25|:3$ $\qquad x = \frac{25}{3}$

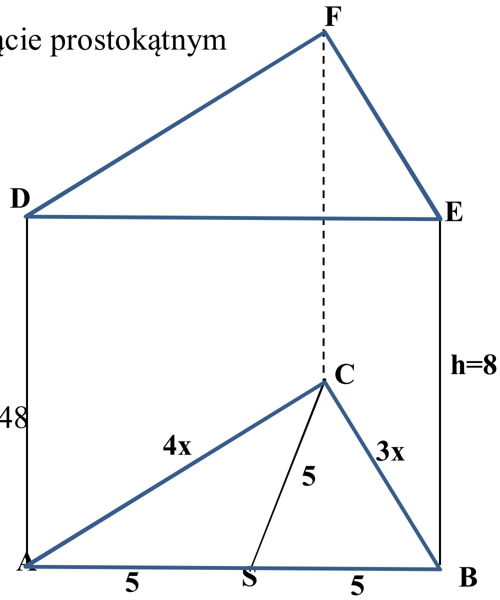
$A = \left(\frac{25}{3};\quad 0\right)$

$|AB| = \sqrt{\left(\frac{25}{3} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{3}\right)^2 + \left(\frac{25}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{9} + \frac{625}{16}} = \sqrt{\frac{10000+5625}{144}} = \sqrt{\frac{15625}{144}} = \frac{125}{12}$

Odpowiedź: Współrzędne punktów: $A = \left(\frac{25}{3};\quad 0\right)$; $B = \left(0;\ \frac{25}{4}\right)$

Długość odcinka AB wynosi: $|AB| = \frac{125}{12}$.

Zad 34. Wiadomym jest że środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży na środku przeciwprostokątnej.



Tak więc $|AS| = |BS| = |CS| = 5$

$|AB| = 2 \cdot 5 = 10$

Stosując Tw. Pitagorasa mamy:

$(3x)^2 + (4x)^2 = 10^2 4$

$9x^2 + 16x^2 = 100 \quad \Longrightarrow \quad 25x^2 = 100|:25$

$x^2 = 4 \qquad x = \sqrt{4} = 2$

$3x = 3 \cdot 2 = 6$ – krótsza przyprostokątna

$4x = 4 \cdot 2 = 8$ – dłuższa przyprostokątna

Teraz korzystając z faktu że pole ściany BEFC wynosi48 policzymy wysokość graniastosłupa.

$6 \cdot h = 48|:6 \qquad h = 8$

$P = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 3 \cdot 8 = 24$ - pole podstawy.

$V = P_p \cdot h = 24 \cdot 8 = 192$

Odpowiedź Objętość graniastosłupa wynosi 192