Matura podstawowa maj (czerwiec) 2020r

<u>*Zadania zamknięte*</u>

Zad 1. $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ to dla $x = \sqrt{3} + 3$ mamy $\left(\sqrt{3}+3-3\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ **(B)**

Zad 2. $\frac{2^{50}\cdot 3^{40}}{36^{10}} = \frac{2^{10}\cdot 2^{40}\cdot 3^{40}}{6^{2\cdot 10}} = \frac{2^{10}\cdot(2\cdot 3)^{40}}{6^{20}} = \frac{2^{10}\cdot 6^{40}}{6^{20}} = 2^{10}\cdot 6^{40-20} = 2^{10}\cdot 6^{20} = 2^{10}\cdot(2\cdot 3)^{20} =$
$2^{10}\cdot 2^{20}\cdot 3^{20} = 2^{30}\cdot 3^{20}$ **(C)**

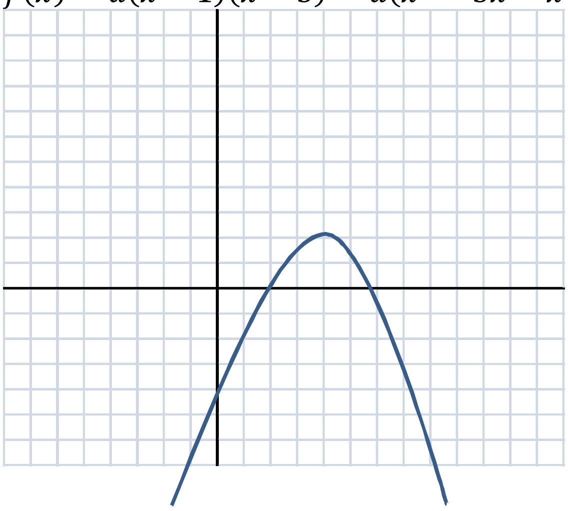
Zad 3. $\log_5\sqrt{125} = \log_5\sqrt{5^3} = \log_5(5^3)^{\frac{1}{2}} = \log_5 5^{3\cdot\frac{1}{2}} = \log_5 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$ **(D)**

Zad 4. x cena początkowa $y = 0{,}8x$ – cena po obniżce o 20%
teraz startujemy z ceny $y = 0{,}8x$ – 100% i mamy ją podnieść do poziomu x czyli obliczymy
$0{,}2x$ – z% (trzeba rozwiązać tą proporcję)
$z\% = \frac{0{,}2x\cdot 100\%}{0{,}8x} = \frac{100\%}{4} = 25\%$ **(A)**

Zad 5. $3(1-x) > 2(3x-1) - 12x$
$3 - 3x > 6x - 2 - 12x$
$-3x - 6x + 12x > -2 - 3$
$3x > -5|:3$ $x > -\frac{5}{3}$ $x \in \left(-\frac{5}{3};\ \infty\right)$ **(A)**

Zad 6. $x(x-3)(x+2) = 0$ Rozwiązaniami są:
$x = 0 \quad \vee \quad x - 3 = 0 \quad \vee \quad x + 2 = 0$
$x_1 = 0;\quad x_2 = 3;\quad x_3 = -2$ $0 + 3 - 2 = 1$ **(B)**

Wykres funkcji kwadratowej do zadań 7 – 9 $f(x) = a(x-1)(x-3)$ $W = (2;\ 1)$
$f(x) = a(x-1)(x-3) = a(x^2 - 3x - x + 3) = ax^2 - 4ax + 3a$



Zad 7. Widzimy że gałęzie są do dołu więc $a < 0$ mamy oczywiście $p = 2$. – pierwsza współrzędna wierzchołka. Teraz widzimy że dla $p + 1$ jak też $p - 1$ wartość funkcji wynosi 0. Więc $a = -1$ **(D)**

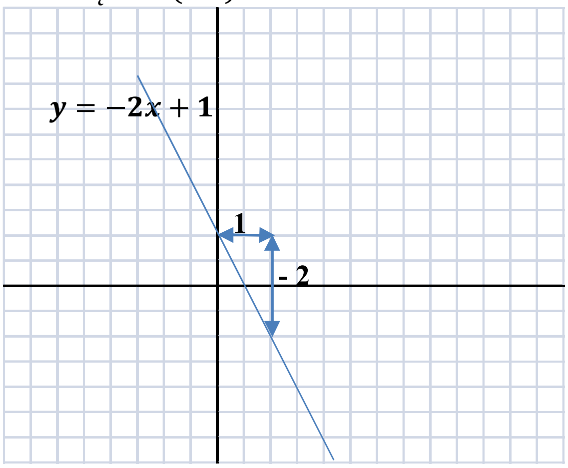
Zad 8. W przedziale $\langle 1;\ 4\rangle$ leży wierzchołek wykresu więc jak widzimy największą wartością jest. $f(p) = q$ czyli $f(2) = 1$ (współrzędna y wierzchołka) **(C)**

Zad 9. Oś symetrii paraboli jako prosta prostopadła do osi OX ma wzór: $x = 2$. **(B)**

Zad 10. $x(x-2) = (x-2)^2$
$x^2 - 2x = x^2 - 4x + 4$
$x^2 - x^2 - 2x + 4x - 4 = 0$
$2x - 4 = 0$ $2x = 4|:2$ $x = 2$ **(B)**

Zad 11. $f(x) = ax + b$ Z wykresu widać że $b = 1$ punkt przecięcia z osią OY. Natomiast ***a*** jest ujemnie (wykres funkcji malejącej). Dokładnie to $a = -2$. Dla jednej jednostki na osi OX wartość spada o 2.

Tak więc $1 \cdot (-2) = -2$



(D)

Zad 12. $f(x) = 4^{-x} + 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4^{-\frac{1}{2}} + 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 = \sqrt{\frac{1}{4}} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ **(B)**

Zad 13. $y = (m-2)x$ $\qquad y = \frac{3}{4}x + 7$

Proste równoległe czyli mają ten sam współczynnik kierunkowy

$m - 2 = \frac{3}{4}$ $\qquad m = \frac{3}{4} + 2 = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ **(C)**

Zad 14. $a_n = 2n^2$ to $a_5 - a_4 = 2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 4^2 = 2 \cdot 25 - 2 \cdot 16 = 50 - 32 = 18$ **(D)**

Zad 15. $a_4 = 3;$ $\qquad r = 5$

$a_4 = a_1 + 3r$ $\qquad 3 = a_1 + 3 \cdot 5$

$a_1 = 3 - 15 = -12$

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $\qquad S_4 = \frac{a_1 + a_4}{2} \cdot 4 = \frac{-12+3}{2} \cdot 4 = \frac{-9}{2} \cdot 4 = -18$ **(C)**

Zad 16. $A = \left(\frac{1}{3};\ -1\right)$ $\qquad f(x) = 3x + b$

Trzeba do wzoru funkcji wstawić dany punkt i obliczymy wartość ***b***

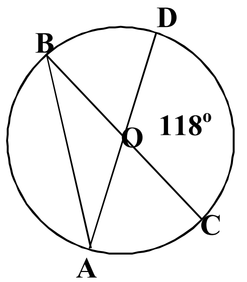
$-1 = 3 \cdot \frac{1}{3} + b$ $\qquad -1 = 1 + b$ $\qquad b = -2$ **(D)**

Zad 17. $\sphericalangle AOC = 180° - 118° = 62°$ z sumy kątów przyległych.

kąt $\sphericalangle AOC$ jest kątem środkowym

a $\sphericalangle ABC$ wpisanym opartym na tym samym łuku

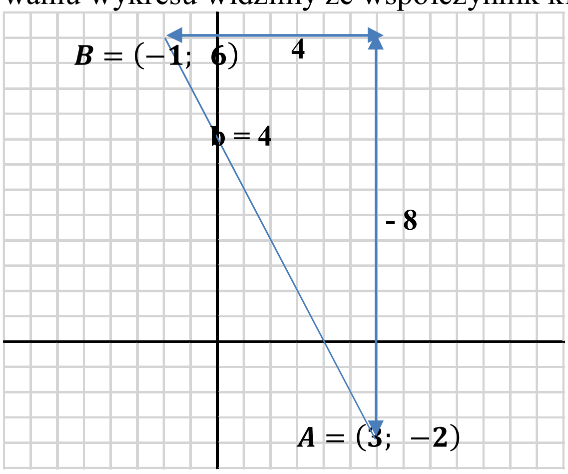
Tak więc $\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 62° = 31°$



(D)

Zad 18. $A = (3;\ -2);$ $\quad B = (-1;\ 6)$

Równanie prostej przechodzącej przez te punkty można policzyć z gotowego wzoru albo po narysowaniu wykresu widzimy że współczynnik kierunkowy można policzyć:



$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2-6}{3-(-1)} = \frac{-8}{4} = -2$

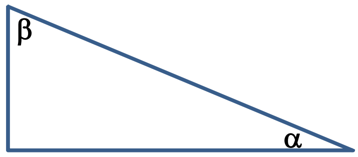
Teraz wstawmy do równania prostej $y = -2x + b$ punkt $A = (3;\ -2)$

mamy $-2 = -2 \cdot 3 + b$ czyli $-2 = -6 + b$ $\quad b = 4$

Mamy więc równanie prostej $y = -2x + 4$

(A)

Zad 19.



W trójkącie prostokątnym prawdziwy jest wzór $\cos\alpha = \sin(90-\alpha) = \sin\beta$

$2\cos\alpha - \sin\beta = 2\cos\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha$ **(B)**

Zad 20. $A = (-3;\ 5)$ $B = (3;\ -5)$ jako symetryczny względem $S = (0;\ 0)$

$|AB| = \sqrt{\left(3-(-3)\right)^2 + (-5-5)^2} = \sqrt{6^2+10^2} = \sqrt{36+100} = \sqrt{136} = \sqrt{4\cdot 34} = 2\sqrt{34}$ **(A)**

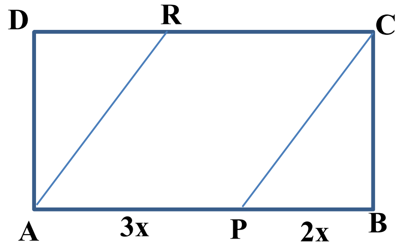
Zad 21. Mamy zbiór $\{1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$. Tworzymy liczby dwucyfrowe bez powtarzania cyfr.
Gdyby uczeń znał pojęcie wariacji bez powtórzeń to rozwiązania jest szybkie i oczywiste.
Rozwiązujemy na piechotę. Do 1 można dopisać jako drugą cyfrę 4 pozostałe. – 4 możliwości.
Tak samo będzie jak na początku ustawimy dowolną inną cyfrę, więc mamy: $4\cdot 5 = 20$ **(C)**

Zad 22. $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{|CR|}{|RD|} = \frac{3}{2}$

Pole całego wynosi 90

Pole czworokąta APCR to $\frac{3}{5}\cdot 90 = \frac{270}{5} = 54$

Pole czworokąta APCR to $\frac{3}{5}$ całości gdyż trójkąty ADR i PBC tworzą razem prostokąt o wielkości $\frac{2}{5}$ całego prostokąta ABCD.



(C)

Zad 23. Mamy dwa zbiory o takiej samej medianie: $\{2;\ 3;\ a;\ 8\}$ i $\{5;\ 3;\ 6;\ 8;\ 2\}$. Drugi zbiór po uporządkowaniu: $\{2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 8\}$, więc jego mediana to 5 (liczba na środku.

Tak więc mediana w I zbiorze $\frac{3+a}{2} = 5 |\cdot 2$ $3+a = 5\cdot 2$ $3+a = 10$

$a = 7$ **(A)**

Zad 24. $d = 4\sqrt{3}$ - przekątna sześcianu. Wiemy że $d = a\sqrt{3}$ czyli $a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$a = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$

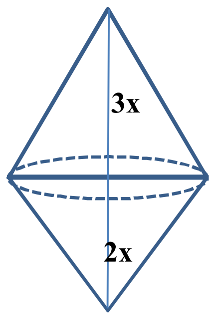
$P_{pc} = 6a^2 = 6\cdot 4^2 = 6\cdot 16 = 96$ **(A)**

Zad 25. Stosunek wysokości $\frac{3}{2}$ czyli $h_2 = \frac{3}{2}h$

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot h = 12cm^2$ - objętość I stożka

$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot\frac{3}{2}\cdot h = \frac{3}{2}\cdot 12cm^2 = 18cm^2$ – objętość II stożka

tak więc razem $12cm^2 + 18cm^2 = 30cm^2$



(B)

<u>Zadania otwarte</u>

Zad 26. $2(x-1)(x+3) > x-1$

$2(x^2+3x-x-3) > x-1$

$2(x^2+2x-3) > x-1$

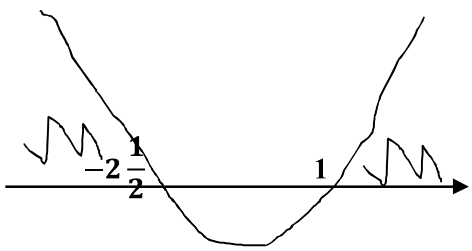
$2x^2+4x-6-x+1 > 0$

$2x^2+3x-5 > 0$

$\Delta = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-5) = 9+40 = 49$ $\sqrt{49} = 7$

$x_1 = \frac{-3-7}{2\cdot 2} = \frac{-10}{4} = -2{,}5$ $x_2 = \frac{-3+7}{2\cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$

Odp: $x \in \left(-\infty;\ -2\frac{1}{2}\right) \cup (1;\ \infty)$



Zad 27. $(x^2-1)(x^2-2x) = 0$

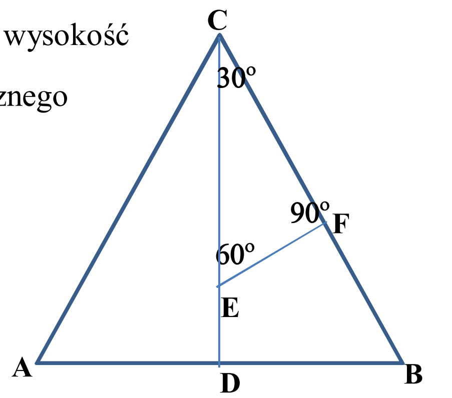
$(x-1)(x+1)x(x-2) = 0$

$x-1=0$ lub $x+1=0$ lub $x=0$ lub $x-2=0$

Odp: $x_1 = 1$ $x_2 = -1$ $x_3 = 0$ $x_4 = 2$

Zad 28. $a(a-2b)+2b^2>0$ $\qquad a\neq b$ Mamy zatem po przekształceniu:
$a^2-2ab+2b^2>0$ czyli: $a^2-2ab+b^2+b^2>0$ co w efekcie daje:
$(a-b)^2+b^2>0$ a to jest prawdziwe dla wszystkich liczb spełniających warunek $a\neq b$ gdyż $(a-b)^2$ jest większe od zera jako kwadrat pewnej liczby różnej od zera natomiast b^2 jest nie ujemny.
(co należało wykazać)

Zad 29. $|CE|=\frac{3}{4}|CD|$ Z trójkąta równobocznego wiemy że $|CD|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ wysokość
$|CE|=\frac{3}{4}|CD|=\frac{3}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3a\sqrt{3}}{8}$ gdzie ***a*** – bok trójkąta równobocznego
Trójkąt CEF ma kąty 30°; 60°; 90°.
Korzystając teraz z funkcji trygonometrycznej mamy:
$\sin 60°=\frac{CF}{CE}$ $\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{CF}{\frac{3a\sqrt{3}}{8}}$
$2CF=\sqrt{3}\cdot\frac{3a\sqrt{3}}{8}=\frac{3a\left(\sqrt{3}\right)^2}{8}=\frac{9a}{8}$
$2CF=\frac{9a}{8}|:2$ $\qquad CF=\frac{9a}{16}=\frac{9}{16}|CB|$



Zad 30. Dwukrotny rzut kostką do gry. Zbiór wszystkich wyników przedstawia się następująco:

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6)\\(2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6)\\(3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6)\\(4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6)\\(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6)\\(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)\end{matrix}\right\} \qquad \overline{\overline{\Omega}}=36$$

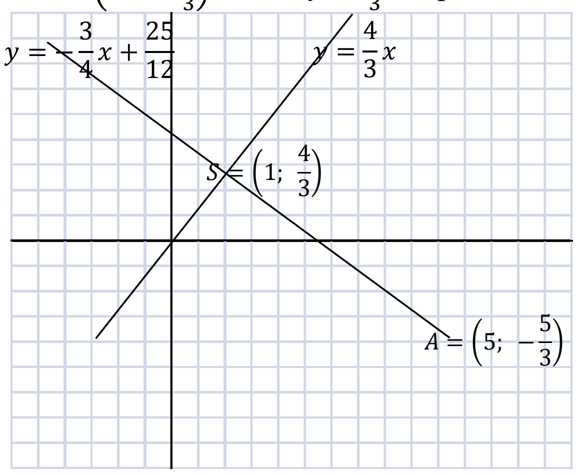
Elementy zbioru A to $A=\left\{\begin{matrix}(1,5);(2,5);(3,5);(4,5);(6,5);\\(5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);\end{matrix}\right\}$ $\qquad \overline{\overline{A}}=11$

$P(A)=\frac{11}{36}$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenie że co najmniej jeden raz wypadnie 5 wynosi $\frac{11}{36}$.

Zad 31. $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}=4$ czyli $\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3\cos\alpha}{\cos\alpha}=4$ mamy więc:
$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+3=4$ teraz wiedząc że $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ Mamy:
$2\tan\alpha+3=4$ $\qquad 2\tan\alpha=4-3$ $\qquad 2\tan\alpha=1|:2$
$\tan\alpha=\frac{1}{2}$
Odpowiedź: $\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

Zad 32. $A=\left(5;\ -\frac{5}{3}\right)$ $\qquad y=\frac{4}{3}x$ – prosta na której leżą punkty B i D



Mamy więc dane że prosta BD jest przekątną kwadratu i prosta AC jest prostopadłą do prostej BD jako druga przekątna. Policzymy równanie prostej AC
$a=-\frac{3}{4}$ $\qquad \left(-\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=-1\right)$ i przechodzi przez punkt $A=\left(5;\ -\frac{5}{3}\right)$
$y=ax+b$ $\qquad -\frac{5}{3}=-\frac{3}{4}\cdot 5+b$ $\qquad b=\frac{3\cdot 5}{4}-\frac{5}{3}=\frac{15}{4}-\frac{5}{3}=\frac{15\cdot 3-5\cdot 4}{12}=\frac{45-20}{12}=\frac{25}{12}$

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{12}$ – równanie prostej AC.

Teraz obliczymy współrzędne punktu przecięcia przekątnych.

$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{12} \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$ czyli mamy $\frac{4}{3}x = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}x + \frac{3}{4}x = \frac{25}{12}$

$\frac{4\cdot 4+3\cdot 3}{12}x = \frac{25}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{16+9}{12}x = \frac{25}{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{12}x = \frac{25}{12} \quad \Rightarrow \quad x = 1$

Teraz wstawmy $x = 1$ do wzoru np.: $y = \frac{4}{3}x$ i mamy $y = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}$

$S = \left(1; \ \frac{4}{3}\right)$ współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu.

Teraz policzmy długość odcinka AS – jest to długość połowy przekątnej kwadratu.

$AS = \sqrt{\left(-\frac{5}{3} - \frac{4}{3}\right)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{9}{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{(-3)^2 + 16} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$AC = 2 \cdot AS = 2 \cdot 5 = 10$ długość przekątnej kwadratu

Pole policzymy ze wzoru z przekątnymi $P = \frac{p^2}{2} = \frac{10^2}{2} = \frac{100}{2} = 50$

Odpowiedź: Punkt przecięcia przekątnych to $S = \left(1; \ \frac{4}{3}\right)$ a pole kwadratu wynosi 50.

Zad 33. Mamy ciąg geometryczny taki że: $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$

Wiedząc że $a_2 = a_1 \cdot q; \qquad a_3 = a_1 \cdot q^2$ mamy:

$6a_1 - 5a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 0$ czyli: $a_1(6 - 5q + q^2) = 0$ Korzystając z faktu że $a > 0$ mamy

$6 - 5q + q^2 = 0$ czyli: $q^2 - 5q + 6 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 \qquad \sqrt{1} = 1$

$q_1 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad q_2 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Mamy podać wartość $q \in \left(2\sqrt{2}; \quad 3\sqrt{2}\right)$

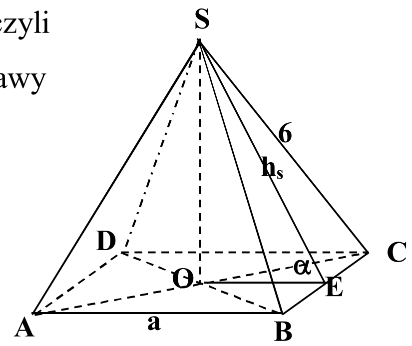
Oczywistym jest że $q_1 = 2$ nie spełnia tego warunku gdyż $\sqrt{2} > 1$

Dla $q_2 = 3$ mamy: $2\sqrt{2} \approx 2 \cdot 1{,}4142 = 2{,}8284 < 3$ tak więc $q_2 = 3 \in \left(2\sqrt{2}; \quad 3\sqrt{2}\right)$

Odpowiedź: $q = 3$ spełnia warunki zadania.

Zad 34. Tangens kąta nachylenia ściany to $\tan\alpha = \frac{SO}{OE} = \sqrt{7}$ czyli

$\frac{SO}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{7} \qquad SO = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{7}$ gdzie ***a*** – kr podstawy



CO – połowa przekątnej podstawy

$CO = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

Mamy do dyspozycji trójkąt prostokątny SOC

Stosujemy Tw. Pitagorasa:

$\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = 6^2$

$\frac{7}{4}a^2 + \frac{2}{4}a^2 = 36$

$\frac{9}{4}a^2 = 36 |\cdot 4 \quad \Rightarrow \quad 9a^2 = 144 |: 9$

$a^2 = \frac{144}{9} = 16 \qquad a = \sqrt{16} = 4$

Pozostało policzyć wysokość ostrosłupa i objętość.

$h = SO = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{7} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{7} = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{7} = \frac{32}{3}\sqrt{7}$

Odpowiedź: Objętość danego ostrosłupa wynosi $\frac{32}{3}\sqrt{7}$.