<u>***Maj(czerwiec) 2020 rok (poziom rozszerzony)***</u>

<u>***Zadania zamknięte***</u>

Zad 1. $W(x) = x^{2019} - 3x^{2020} + 2x + 6$

$W(1) = 1^{2019} - 3 \cdot 1^{2020} + 2 \cdot 1 + 6 = 1 - 3 + 2 + 6 = 9 - 3 = 6$ więc nie dzieli się przez $x - 1$ i daje resztę 6

$W(-1) = (-1)^{2019} - 3 \cdot (-1)^{2020} + 2 \cdot (-1) + 6 = -1 - 3 \cdot 1 - 2 + 6 = -1 - 3 - 2 + 6 = -6 + 6 = 0$ więc dzieli się przez $x + 1$ **(B)**

Zad 2. $a_n = \frac{3n^2+7n-5}{11-5n+5n^2}$ Wiadomym jest że na granicę w nieskończoności ma wpływ tylko najwyższa potęga. Tak więc pisząc w skrócie mamy

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+7n-5}{11-5n+5n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{5n^2} = \frac{3}{5}$ **(C)**

Zad 3. I urna 3 białe i 7 czarnych II urna 1 biała i 9 czarnych.

B - Wylosowanie kuli białej I urna: $P(B) = \frac{3}{3+7} = \frac{3}{10}$ II urna $P(B) = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}$

Rzut kostką: wylosowane 1 na kostce $P(1) = \frac{1}{6}$

wylosowana inna liczba na kostce $P(inna) = \frac{5}{6}$

A – prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli

$P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{60} + \frac{5}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$ **(A)**

Zad 4. $\left(x\sqrt{2} + y\sqrt{3}\right)^4$ Stosując wzór na $(a+b)^n$ mamy $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

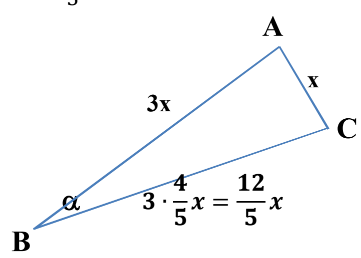
W zadaniu chodzi o policzenie:

$6a^2b^2 = 6 \cdot \left(x\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(y\sqrt{3}\right)^2 = 6 \cdot x^2 \cdot 2 \cdot y^2 \cdot 3 = 6 \cdot 6x^2y^2 = 36x^2y^2$ **(B)**

Zad 5. Długości boków zgodnie z warunkami zadania to: x; $3x$; $\frac{12}{5}x$

Najmniejszy kąt to kąt przy wierzchołku B bo leży naprzeciwko najmniejszego boku

Korzystając z twierdzenia Cosinusów mamy:



$x^2 = (3x)^2 + \left(\frac{12}{5}x\right)^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{12}{5}x \cdot \cos\alpha$

$x^2 = 9x^2 + \frac{144}{25}x^2 - \frac{72}{5}x^2 \cdot \cos\alpha$

$\frac{72}{5}x^2 \cdot \cos\alpha = 9x^2 - x^2 + \frac{144}{25}x^2$

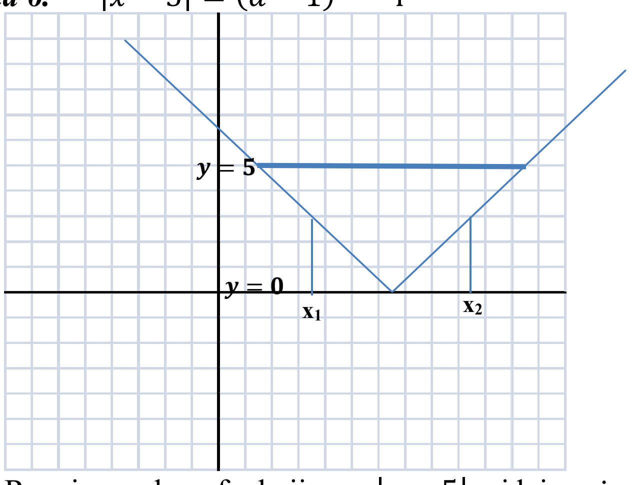
$\frac{72}{5}x^2 \cdot \cos\alpha = 8x^2 + \frac{144}{25}x^2$

$\frac{72}{5}x^2 \cdot \cos\alpha = x^2\left(8 + \frac{144}{25}\right)$ $\cos\alpha = \frac{8+\frac{144}{25}}{\frac{72}{5}} = \left(8 + \frac{144}{25}\right) \cdot \frac{5}{72} = \frac{40}{72} + \frac{2}{5} = \frac{5}{9} + \frac{2}{5} = \frac{25+18}{45} = \frac{43}{45}$

$\frac{43}{45} = 0{,}9(5) \approx 0{,}95555\ldots$

Odpowiedź: $\boxed{9}\boxed{5}\boxed{5}$

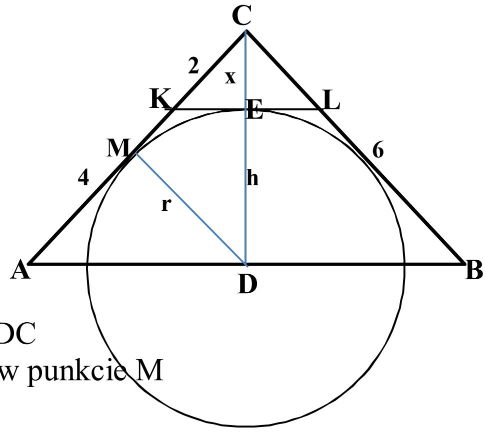
Zad 6. $|x - 5| = (a-1)^2 - 4$



Rysując wykres funkcji $y = |x - 5|$ widzimy że aby oba rozwiązania były dodatnie musi być spełniony warunek: $0 < |x - 5| < 5$

czyli $0 < (a-1)^2 - 4 < 5$
Mamy więc do rozwiązania 2 nierówności: $0 < (a-1)^2 - 4$ i $(a-1)^2 - 4 < 5$
I) rozwiązujemy nierówność $0 < (a-1)^2 - 4$
$a^2 - 2a + 1 - 4 > 0$
$a^2 - 2a - 3 > 0$
$\Delta = (-2)^2 = 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 \qquad \sqrt{16} = 4$
$a_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad a_2 = \frac{2+4}{2} = 3$
$a \in (-\infty;\ \ -1) \cup (3;\ \ \infty)$
II) rozwiązujemy nierówność $(a-1)^2 - 4 < 5$
$a^2 - 2a + 1 - 4 - 5 < 0$
$a^2 - 2a - 8 < 0$
$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 \qquad \sqrt{36} = 6$
$a_1 = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad a_2 = \frac{2+6}{2} = 4$
$a \in (-2;\ \ 4)$
Odpowiedź: Częścią wspólną I i II jest przedział $a \in (-2;\ \ -1) \cup (3;\ \ 4)$

Zad 7. Wykazać że $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{4}{5}$



Trójkąt KLC jest podobny do trójkąta ADC w skali $\frac{1}{3}$
gdyż $CK = \frac{1}{3}AC$ i jest tak samo prostokątny jak ADC (kkk)
co wynika z faktu że KL styczny do okręgu czyli równoległy do AB
Mamy więc $x = \frac{1}{3}h$ i $r = \frac{2}{3}h$ bo $x + r = h$
Oznaczmy jeszcze $AD = 3a; \quad KE = a$
Teraz trzeba zauważyć że trójkąt CDM jest też podobny do KEC i ADC
Wynika to z faktu że jest też prostokątny bok AC styczny do okręgu w punkcie M
oraz ma kąt wspólny $\sphericalangle MCD = \sphericalangle KCE = \sphericalangle ACD$
Tak więc trójkąt ADM jest też podobny bo prostokątny i ma kąt: $\sphericalangle MAD = \sphericalangle CKE = \sphericalangle CDM$ (kkk)
oraz skala podobieństwa między KEC i MAD wynosi 2 bo $MD = \frac{2}{3}h \quad CE = x = \frac{1}{3}h$
Teraz z podobieństwa trójkątów CKE i CMD mamy odpowiednie boki:

Trójkąt CKE	CK = 2	CE = $\frac{1}{3}h$	KE = a
Trójkąt CMD	CD = h	CM = Z	DM = r = $\frac{2}{3}h$

Korzystając z proporcjonalności odpowiednich odcinków mamy:
$\frac{CK}{CD} = \frac{KE}{DM} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2}{h} = \frac{a}{\frac{2}{3}h} \qquad \Longrightarrow \qquad a \cdot h = 2 \cdot \frac{2}{3}h |: h \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{4}{3}$
Teraz korzystając z faktu podobieństwa KEC i MAD mamy że $|AM| = 2 \cdot |KE| = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$
Tak więc $|CM| = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$
Ostatecznie $\frac{|AM|}{|MC|} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$ ***co należało wykazać***

Zad 8. Wykazać że jeżeli $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$ to $a = 2b$ dla $a > 0; \quad b > 0$
Wielu by pomyślało że wystarczy do wzoru $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$ za ***a*** podstawić ***2b*** i zobaczyć że wszystko się zgadza. $(2b)^2 + 2 \cdot 2b = 4b^2 + 4b$ co widać że jest prawdą.
Jednak dla matematyków jest to tylko sprawdzenie (lub zgadywanka) a trzeba to rozwiązać.
$a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$ czyli $a^2 + 2a - 4b^2 - 4b = 0$
potraktujmy to równanie jako równanie ze zmienną ***a*** i parametrem ***b***
$a^2 + 2a - (4b^2 + 4b) = 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot [-(4b + 4b^2)] = 4 + 16b + 16b^2 = (2 + 4b)^2 \qquad \sqrt{(2 + 4b)^2} = 2 + 4b$

$a_1 = \frac{-2-(2+4b)}{2} = \frac{-4-4b}{2} = -2-2b \qquad a_2 = \frac{-2+(2+4b)}{2} = \frac{4b}{2} = 2b$

$a_1 = -2-2b$ nie spełnia warunków zadania bo jest ujemne

$a_2 = 2b$ jest rozwiązaniem równania ***co należało wykazać***

Zad 9. $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3 \qquad x \in \langle 0;\ \ 2\pi\rangle$

Korzystamy ze wzoru na $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ oraz z jedynki $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Mamy: $3(1-2\sin^2 x) + 10(1-\sin^2 x) = 24\sin x - 3$

czyli: $3 - 6\sin^2 x + 10 - 10\sin^2 x = 24\sin x - 3$

$-16\sin^2 x - 24\sin x + 3 + 10 + 3 = 0$

$-16\sin^2 x - 24\sin x + 16 = 0 |: (-8)$

$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$ podstawiając $\sin x = t$ mamy do rozwiązania równanie kwadratowe

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$\Delta = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 9 + 16 = 25 \qquad \sqrt{25} = 5$

$t_1 = \frac{-3-5}{2\cdot 2} = \frac{-8}{4} = -2 \qquad t_2 = \frac{-3+5}{2\cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$t_1 = -2$ nie spełnia warunków zadania $(-1 \leq \sin x \leq 1)$

Dla $t_2 = \frac{1}{2}$ mamy $\sin x = \frac{1}{2}$ to dla $x \in \langle 0;\ \ 2\pi\rangle$ rozwiązaniami są $x_1 = \frac{\pi}{6}; \quad x_2 = \frac{5}{6}\pi$

Zad 10. $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}; \quad a_n$ – ciąg geometryczny.

Są to też wyrazy rosnącego ciągu arytmetycznego $\left\{b_1 = a_3; \quad b_2 = a_2; \quad b_3 = \frac{a_2+a_1}{2}; \quad b_4 = a_1\right\}$

Wiedząc że w ciągu geometrycznym $a_2 = a_1 q; \quad a_3 = a_1 q^2$ Mamy w ciągu arytmetycznym:

$\left\{b_1 = a_1 q^2; \quad b_2 = a_1 q; \quad b_3 = \frac{a_1 q + a_1}{2}; \quad b_4 = a_1\right\}$

Teraz korzystając z własności ciągu arytmetycznego $b_3 - b_2 = b_2 - b_1$ mamy:

$\frac{a_1 q + a_1}{2} - a_1 q = a_1 q - a_1 q^2 | \cdot 2$

$a_1 q + a_1 - 2a_1 q = 2a_1 q - 2a_1 q^2$

$2a_1 q^2 - a_1 q - 2a_1 q + a_1 = 0$

$2a_1 q^2 - 3a_1 q + a_1 = 0$

$a_1(2q^2 - 3q + 1) = 0$ Mamy więc $a_1 = 0 \ \vee \ 2q^2 - 3q + 1 = 0$

$a_1 = 0$ niezgodne z warunkami zadania gdyż dany ciąg geometryczny jest niezerowy.

$2q^2 - 3q + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1 \qquad \sqrt{1} = 1$

$q_1 = \frac{3-1}{2\cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad q_2 = \frac{3+1}{2\cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$

$q_2 = 1$ nie spełnia warunków zadania bo ciąg arytmetyczny byłby stały.

Dla $q = \frac{1}{2}$ mamy

$a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}$ czyli $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = \frac{21}{4}$ co po podstawieniu wartości $\boldsymbol{q}$ daje:

$a_1 + \frac{1}{2}a_1 + a_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \quad \Longrightarrow \quad a_1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_1 = \frac{21}{4} \quad \Longrightarrow \quad \frac{7}{4}a_1 = \frac{21}{4} | \cdot \frac{4}{7}$

$a_1 = 3$

Odpowiedź. Pierwszy wyraz danego ciągu geometrycznego to $a_1 = 3$

Zad 11. $x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 7m - 15 = 0$

I) Ma być dwa różne pierwiastki czyli $\Delta > 0$

$\Delta = (3m+2)^2 - 4\cdot 1\cdot(2m^2 + 7m - 15) = 9m^2 + 12m + 4 - 8m^2 - 28m + 60$

$\Delta = m^2 - 16m + 64m^2 = (m-8)^2 > 0$

$(m-8)^2 > 0$

$(m-8)^2$ jako kwadrat liczby $m - 8$ jest dodatni dla wszystkich liczb z wyjątkiem $m = 8$

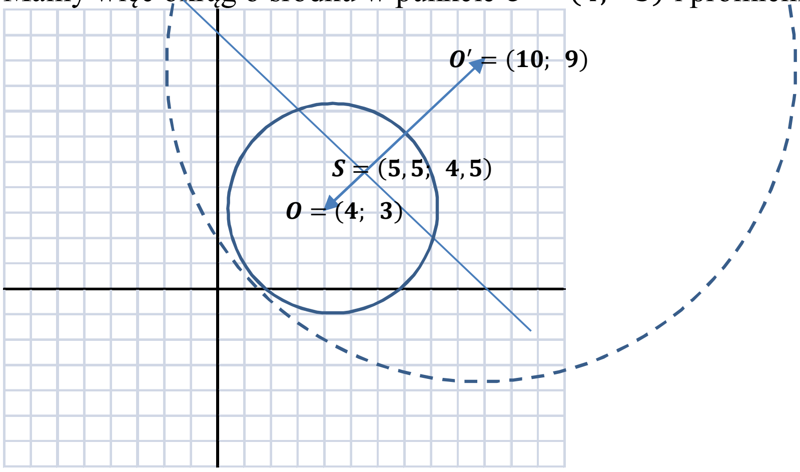
czyli mamy $m \in (-\infty;\ \ 8) \cup (8;\ +\infty)$

II) Pierwiastki równania spełniają warunek: $2{x_1}^2 + 5x_1 x_2 + 2{x_2}^2 = 2$

Można to zrobić dwoma sposobami:

a) można bezpośrednio policzyć x_1; x_2 gdyż $\Delta = (m-8)^2$ więc $\sqrt{\Delta} = m-8$ i policzenie pierwiastków nie stanowi problemu.
b) Można skorzystać ze wzorów Viete'a
$2{x_1}^2 + 5x_1x_2 + 2{x_2}^2 = 2$ czyli $2{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 2{x_2}^2 + x_1x_2 = 2$ co daje:
$2({x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2) + x_1x_2 = 2$ czyli
$2(x_1+x_2)^2 + x_1x_2 = 2$ i po zastosowaniu wzorów Viete'a $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ mamy:
$2(3m+2)^2 + 2m^2 + 7m - 15 = 2$
$2(9m^2 + 12m + 4) + 2m^2 + 7m - 15 - 2 = 0$
$18m^2 + 24m + 8 + 2m^2 + 7m - 17 = 0$
$20m^2 + 31m - 9 = 0$
$\Delta = 31^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-9) = 981 + 720 = 1681$ $\sqrt{168} = 41$
$m_1 = \frac{-31-41}{2 \cdot 20} = \frac{-72}{40} = -\frac{9}{5}$ $m_2 = \frac{-31+41}{2 \cdot 20} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$
Odp. Mamy dwie wartości parametru m: $m_1 = -\frac{9}{5}$; $m_2 = \frac{1}{4}$ dla których spełnione są warunki zadania.

Zad 12. Prosta $x + y - 10 = 0$ i okrąg $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$
Prosta $x + y - 10 = 0$ czyli w postaci kierunkowej $y = -x + 10$ przecina osie układu współrzędnych w punktach $(10;\ 0)$ i $(0;\ 10)$ jak na rysunku.
Okrąg $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 8 = 0$ doprowadźmy do postaci kanonicznej, czyli mamy:
$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 + 8 = 16 + 9$
$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25 - 8$
$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 17$ czyli $r = \sqrt{17}$
Mamy więc okrąg o środku w punkcie $O = (4;\ 3)$ i promieniu $r = \sqrt{17}$

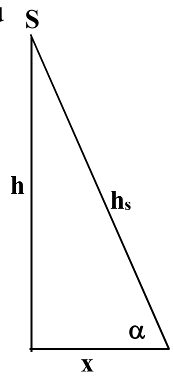


Obliczmy współrzędne punktów przecięcia okręgu z dana prostą czyli rozwiążmy układ równań:
$\begin{cases} y = -x + 10 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 17 \end{cases}$ wstawiając wartość y z I równania do II mamy:
II) $(x-4)^2 + (-x + 10 - 3)^2 = 17$
$x^2 - 8x + 16 + (-x+7)^2 = 17$
$x^2 - 8x + 16 + x^2 - 14x + 49 - 17 = 0$
$2x^2 - 22x + 48 = 0 |: 2$
$x^2 - 11x + 24 = 0$
$\Delta = (-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 121 - 96 = 25$ $\sqrt{25} = 5$
$x_1 = \frac{11-5}{2} = \frac{6}{2} = 3$ $x_2 = \frac{11+5}{2} = \frac{16}{2} = 8$
Dla $x_1 = 3$ mamy: $y_1 = -3 + 10 = 7$ $K = (3;\ 7)$
Dla $x_2 = 8$ mamy: $y_2 = -8 + 10 = 2$ $L = (8;\ 2)$
Obliczamy współrzędna punktu S jako środka odcinka KL.
$x = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$ $y = \frac{7+2}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$ $S = (5{,}5;\ 4{,}5)$
Jednokładność o skali $k = -3$ oznacza że punkty $O\ i\ O'$ leżą po przeciwnych stronach środka jednokładności S oraz $|SO'| = 3 \cdot |SO|$. Inaczej mówiąc $\overrightarrow{SO'} = -3\overrightarrow{SO}$

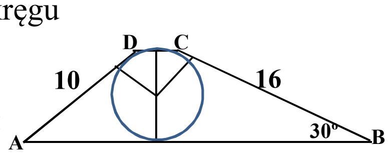
$\overrightarrow{SO} = [4 - 5{,}5;\ \ 3 - 4{,}5] = [-1{,}5;\ \ -1{,}5]$ $\qquad \overrightarrow{SO'} = -3\overrightarrow{SO} = -3[-1{,}5;\ \ -1{,}5] = [4{,}5;\ \ 4{,}5]$
Tak więc teraz łatwo policzyć współrzędne punktu $O' = (5{,}5 + 4{,}5;\ \ 4{,}5 + 4{,}5) = (10;\ 9)$
Oczywistym jest że promień nowego okręgu jest 3 razy większy $r_2 = 3 \cdot \sqrt{17} = \sqrt{9 \cdot 17} = \sqrt{153}$
$(x - 10)^2 + (y - 9)^2 = 153$
Odpowiedź: Okrąg będący obrazem danego okręgu w jednokładności w skali 3 ma równanie
$(x - 10)^2 + (y - 9)^2 = 153$

Zad 13. Liczby mają być 7 – cyfrowe i ma w nich być 3 jedynki 2 dwójki i 2 dowolne inne cyfry.
Tych dowolnych innych cyfr jest osiem: $\{0;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$
Zaczynamy wypełniać ten 7 – cyfrowy ciąg od 3 jedynek to jest $\binom{7}{3}$ sposobów.
Dokładamy potem w cztery wolne miejsca 2 dwójki to jest $\binom{4}{2}$ sposobów.
Zostały dwa puste miejsca i w każde możemy wpisać dowolną inną cyfrę (te inne cyfry mogą też się powtarzać) czyli wariacje z powtórzeniami: $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$
Tak więc wszystkich takich 7 – cyfrowych liczb z dowolną cyfrą na początku będzie:
$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{2} \cdot 8 \cdot 8 = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 64 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 64 = 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 64 = 13440$
Od tego wyniku trzeba odjąć ilość liczb które by miały na początku ***zero.*** Rozumując analogicznie jak wyżej tylko z uwzględnieniem że 0 ustalone na początku a do wypełnienia jest 6 dalszych miejsc, mamy:
$\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 8 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot 8 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{1} \cdot 8 = 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 8 = 480$
Ostatecznie mamy: $13440 - 480 = 12960$
Odpowiedź: Wszystkich liczb 7 – cyfrowych spełniających warunki zadania jest 12960.

Zad 14. Dane jest że każda ściana boczna ma taki sam kąt z podstawą więc w przekroju tego ostrosłupa wzdłuż wysokości i wysokości ściany otrzymujemy taki sam trójkąt prostokątny o bokach: h; h_s; x.

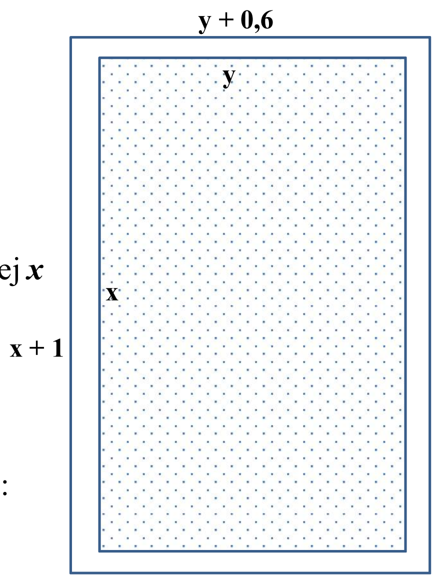


Wynika z tego dalej że odcinek $x = r$ jest promieniem okręgu wpisanego w ten trapez.



Z faktu że w czworokąt wpisany jest okrąg wynika że:
sumy długości przeciwległych boków są takie same czyli:
$|AD| + |BC| = |AB| + |CD| = 10 + 16 = 26$
$h_p = 2r = 16 \cdot \sin 30° = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$ czyli mamy też:
$x = r = \frac{1}{2} h_p = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$
teraz korzystając z danej $\tan\alpha = \frac{9}{2}$ mamy: $\frac{h}{r} = \frac{9}{2}$ czyli $\frac{h}{4} = \frac{9}{2}$ $\qquad h = 18$ – wysokość ostrosłupa.
$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{26}{2} \cdot 8 \cdot 18 = \frac{1}{3} \cdot 13 \cdot 144 = 13 \cdot 48 = 624$
Odpowiedź: Objętość ostrosłupa wynosi 624.

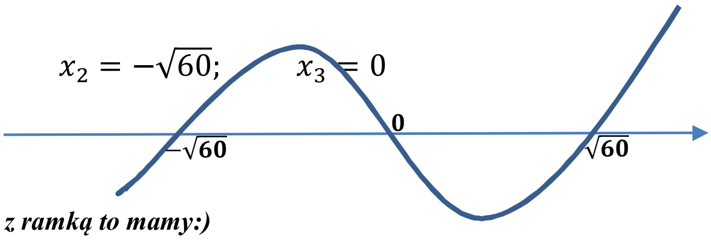
Zad 15. Oznaczmy $x -$ długość ekranu; $y -$ szerokość ekranu.
Wtedy $x + 1 -$ długość całości $y + 0{,}6 -$ szerokość całości.
zgodnie z danymi w zadaniu mamy: $x \cdot y = 60$ czyli $y = \frac{60}{x}$
Teraz licząc pole całości mamy:
$(x + 1)(y + 0{,}6) = xy + 0{,}6x + y + 0{,}6$ i podstawiając $y = \frac{60}{x}$
mamy: $60 + 0{,}6x + \frac{60}{x} + 0{,}6 = 0{,}6x + 60{,}6 + \frac{60}{x}$
Tak więc można zapisać wzór na pole całości jako funkcję zmiennej ***x***
$f(x) = 0{,}6x + 60{,}6 + \frac{60}{x} = \frac{0{,}6x^2 + 60{,}6x + 60}{x}$
Trzeba określić dziedzinę tej funkcji:
(zakładamy że długość i szerokość to wymiary ekranu)
a) $x > 0$ gdyż długość nie może być liczbą ujemną.
b) $y < x$ jako szerokość, więc $\frac{60}{x} < x$ czyli $x - \frac{60}{x} > 0$ mamy więc:



$\frac{x^2}{x} - \frac{60}{x} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2-60}{x} > 0$ czyli $(x^2 - 60)x > 0$

$\left(x - \sqrt{60}\right)\left(x + \sqrt{60}\right)x > 0$ pierwiastki to $x_1 = \sqrt{60}$; $\quad x_2 = -\sqrt{60}$; $\quad x_3 = 0$

Uwzględniając a) i b) mamy: $x \in \left(\sqrt{60}; \quad +\infty\right)$



(Gdy założymy że długość i szerokość to wymiary smartfonu wraz z ramką to mamy:)

$y + 0,6 < x + 1 \quad \Longrightarrow \quad y < x + 0,4$ czyli $\frac{60}{x} < x + 0,4$ co daje $x + 0,4 - \frac{60}{x} > 0$

$\frac{x^2+0,4x-60}{x} > 0$ czyli $(x^2 + 0,4x - 60)x > 0$

Teraz rozłóżmy trójmian z nawiasu na czynniki liniowe:

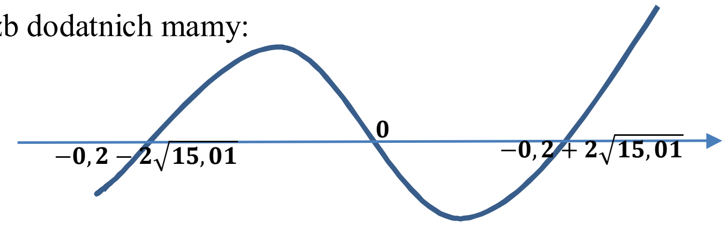
$\Delta = (0,4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = 0,16 + 240 = 240,16 \qquad \sqrt{240,16} = \sqrt{16 \cdot 15,01} = 4\sqrt{15,01}$

$x_1 = \frac{-0,4-4\sqrt{15,01}}{2} = -0,2 - 2\sqrt{15,01}$; $\qquad x_2 = \frac{-0,4+4\sqrt{15,01}}{2} = -0,2 + 2\sqrt{15,01}$

i oczywiście $x_3 = 0$ pierwiastek wynikający z $\boldsymbol{x}$ poza nawiasem.

I ostatecznie jako że dziedzina musi być w zbiorze liczb dodatnich mamy:

$x \in \left(-0,2 + 2\sqrt{15,01}; \quad +\infty\right)$



Liczby $\sqrt{60}$ i $-0,2 + 2\sqrt{15,01}$ różnią się o około 0,2

$f'(x) = \frac{(2\cdot 0,6x+60,6)x-\left(0,6x^2+60,6x+60\right)\cdot 1}{x^2} = \frac{1,2x^2+60,6x-0,6x^2-60,6x-60}{x^2} =$

$= \frac{0,6x^2-60}{x^2}$

Szukamy ekstremum czyli $\frac{0,6x^2-60}{x^2} = 0$

$0,6x^2 - 60 = 0 |: 0,6 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 100 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x - 10)(x + 10) = 0$

$x - 10 = 0 \quad \vee \quad x + 10 = 0$

$x_1 = 10 \qquad x_2 = -10; \qquad x_2$ – nie należy do dziedziny i nie spełnia warunków zadania.

Dla $x_1 = 10$ mamy minimum gdyż $f'(x) = \frac{0,6x^2-60}{x^2} = \frac{0,6x^2}{x^2} - \frac{60}{x^2} = 0,6 - \frac{60}{x^2}$

ma wartość ujemną dla: $x \in \left(\sqrt{60}; \quad 10\right)$ oraz wartość dodatnią dla $x \in (10; \ +\infty)$

$y = \frac{60}{x} = \frac{60}{10} = 6$

Odpowiedź: Wymiary najmniejszego ekranu smartfonu to 10cm długość i 6 cm szerokość.